

APORTES DIDÁCTICOS QUE OFRECE EL USO DE LOS TEXTOS
ESCOLARES CON APOYO DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DE LA
DERIVADA CON ESTUDIANTES DE GRADO UNDECIMO DE LA
INSTITUCION EDUCATIVA INSTITUTO MISTRATO

LUZ ELENA MUÑOZ VALLEJO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
TESIS DE GRADO
2018

**APORTES DIDÁCTICOS QUE OFRECE EL USO DE LOS TEXTOS
ESCOLARES CON APOYO DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DE LA
DERIVADA CON ESTUDIANTES DE GRADO UNDECIMO DE LA
INSTITUCION EDUCATIVA INSTITUTO MISTRATO**



Tesista:
LUZ ELENA MUÑOZ VALLEJO

Director:
JOSÉ FRANCISCO AMADOR MONTAÑO
Magister en Tecnologías de la Información Aplicadas a la
Educación
Universidad Tecnológica de Pereira

Documento presentado como requisito para optar al título de:
Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

*UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Pereira, 2018*

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Dedicatoria

A mi hijo Emmanuel que me enseñó
que para alcanzar nuestros sueños
debemos sacrificar el tiempo
necesario para lograrlo

En primer lugar gracias a Dios porque me ha permitido salir adelante, vencer los obstáculos que a diario encontramos y alcanzar los objetivos de nuestro proyecto de vida.

Al Ministerio de Educación Nacional, que nos brindó la posibilidad de alcanzar nuevos horizontes del conocimiento por medio de esta beca.

A los docentes de la Maestría en la enseñanza de las matemáticas que nos han guiado por el sendero del conocimiento y nos han llevado a un nuevo nivel del saber.

A mi familia que de una u otra manera han contribuido para la ejecución de este trabajo.

A la Institución educativa Instituto Mistrató y a sus estudiantes que nos inspiran para ser cada día mejores Docentes.

Y en especial a mi amigo Cesar Julio del Rio Guapacha, agradecerle por asesorarme de la mejor manera con sus conocimientos y orientarme con inmensa capacidad, experiencia y sin egoísmo en el desarrollo de mi tesis de grado.



El suscrito, Magister José Francisco Amador Montaña, profesor de la Maestría en Enseñanza de las Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP).

Certifica:

Que la presente investigación titulada: *Aportes didácticos que ofrece el uso de los textos escolares con apoyo de las tic en la enseñanza de la derivada con estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Instituto Mistrató*, ha sido realizada bajo su dirección por la Ingeniera Mecánica Luz Elena Muñoz Vallejo, y constituye su trabajo de grado para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas, en la línea de Educación Matemática.

Así, se espera que tenga efectos oportunos ante la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Tecnológica de Pereira el día 22 del mes de Octubre del año 2018.

Magister, José Francisco Amador Montaña.

Contenido

RESUMEN	XII
ABSTRACT.....	XIII
INTRODUCCION	1
1. CAPÍTULO 1 PLANTEAMIENTO, JUSTIFICACION Y ANALISIS DEL PROBLEMA DE ENSEÑANZA DE LA DERIVADA.....	2
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
1.1.1. Pregunta De Investigación	3
1.2. OBJETIVOS.....	3
1.2.1. Objetivo general.....	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.3. JUSTIFICACIÓN	4
1.4. ANTECEDENTES.....	6
CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO.....	10
2.1. ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA.....	10
2.1.1. Constructivismo Social	10
2.1.2. Características del Constructivismo Social.....	11
2.2. TEORÍAS DE APRENDIZAJE.....	11
2.2.1. Aprendizaje Autónomo	12
2.2.2. Características Del Aprendizaje Autónomo.....	12
2.2.3. Aprendizaje Colaborativo (AC).....	13
2.2.4. Características de Aprendizaje Colaborativo (AC).....	13
2.2.5. Aprendizaje basado en problemas (ABP)	14
2.2.6. Características de Aprendizaje basado en problemas (ABP).....	15
2.3. CONOCIMIENTO DIDACTICO DEL PROFESOR	15
2.4. CONOCIMIENTO TECNOLÓGICO, PEDAGÓGICO Y DE CONTENIDO (TPACK).....	16
2.4.1. Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK):.....	18
2.4.2. Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK):.....	18
2.4.3. Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK):	18
2.4.4. Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK):.....	19
2.5. CUARTETO DEL CONOCIMIENTO (KQ).....	19

2.6. LOS TEXTOS ESCOLARES	21
2.7. LAS TIC Y LA EDUCACIÓN.....	24
2.7.1. Uso Del Geogebra.....	26
2.7.2. Uso De Los Codigos QR.....	26
2.8. REGISTROS DE REPRESENTACION SEMIOTICA.....	27
2.9. LA DERIVADA.....	29
2.9.1. La enseñanza y el aprendizaje de la derivada	29
2.9.2. Registro de representación de la derivada	31
3. CAPITULO 3. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN	36
3.1. MARCO METODOLÓGICO	36
3.2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	38
3.2.1. Contexto y sujetos de estudio	39
3.2.2. Ámbito de investigación	39
3.2.3. Población.....	40
3.3. TÉCNICA E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS	40
3.3.1. Conocimiento didáctico del contenido.....	41
4. CAPITULO 4. ANÁLISIS DE DATOS	43
5. CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES	54
5.1. PRIMERA CONCLUSIÓN	54
5.2. SEGUNDA CONCLUSIÓN	54
5.3. TERCERA CONCLUSIÓN	55
5.4. CUARTA CONCLUSIÓN	55
6. CAPITULO 6.RECOMENDACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS	56
BIBLIOGRAFÍA	57
ANEXOS	60

Lista de figuras

Figura 1: Modelo TPACK extraído de http://www.tpack.org	18
Figura 2: Tipos de conocimientos a partir de la interrelación de conocimientos básicos.....	19
Figura 3. Tomada de https://www.sangakoo.com/es/temas/interpretacion-geometrica-de-la-derivada	34

Lista de tablas

Tabla 1 - El Cuarteto De Conocimiento: Dimensiones y Códigos Contributivos.....	20
Tabla 1: Planeación del texto escolar.....	43
Tabla 3: Creación del texto escolar.....	44
Tabla 4: Diseño de secuencia didáctica.....	46
Tabla 5: Inicio --- ajustes primera sesión.....	47
Tabla 6: Desarrollo --- ajustes primera sesión.....	47
Tabla 7: Cierre --- ajustes primera sesión.....	48
Tabla 8: Inicio --- ajustes segunda sesión.....	48
Tabla 9: Desarrollo --- ajustes segunda sesión.....	49
Tabla 10: Cierre --- ajustes segunda sesión.....	50
Tabla 11: Inicio --- ajustes Tercera sesión.....	50
Tabla 12: Desarrollo --- ajustes Tercera sesión.....	50
Tabla 13: Cierre --- ajustes Tercera sesión.....	51
Tabla 14: Inicio --- ajustes Cuarta sesión.....	51
Tabla 15: Desarrollo --- ajustes Cuarta sesión.....	51
Tabla 16: Cierre --- ajustes Cuarta sesión.....	52
Tabla 17: Valoraciones finales.....	52
Tabla 18: Clasificación de interpretaciones.....	53

Lista de Anexos

A.1. TEXTO ESCOLAR DISEÑADO SOBRE DERIVADA.....	62
A.2. UNIDAD DIDACTICA LA DERIVADA UNA RAZON DE CAMBIO.....	86
A.3. ACTIVIDAD DIAGNOSTICA GRUPO 3 PAG. 2 DEL TEXTO.	94
A.4. ACTIVIDAD DIAGNOSTICA GRUPO 2 PAG. 2 DEL TEXTO.....	95
A.5. ACTIVIDAD DESARROLLADA POR ESTUDIANTES 2 DEL GRUPO DOS.....	95
A.6. ACTIVIDAD DESARROLLADA POR ESTUDIANTES 3 DEL GRUPO DOS.....	96
A.7. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 4 DEL TEXTO.....	96
A.8. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 5 DEL TEXTO.....	97
A.9. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 6 DEL TEXTO.....	97
A.10. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 7 DEL TEXTO.....	98
A.11. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 9 DEL TEXTO.....	98
A.12. DESARROLLADO ALGEBRAICO PAGINA 9 DEL TEXTO.....	99
A.13. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 10 DEL TEXTO.....	99
A.14. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 13 DEL TEXTO.....	100
A.15. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 14 DEL TEXTO.....	100
A.16. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 15 DEL TEXTO.....	100
A.17. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 15 DEL TEXTO.....	101
A.18. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 17 DEL TEXTO.....	101
A.19. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 20 DEL TEXTO.....	102
A.20. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 21 DEL TEXTO.....	103
A.21. DESARROLLO ALGEBRAICO PAGINA 21 DEL TEXTO.....	104
A.22. AUTOEVALUACION Y REFLEXION PAGINA 22 DEL TEXTO.....	105

RESUMEN

Este proyecto de grado apoya el macroproyecto de investigación que busca determinar los aportes didácticos de los textos escolares con apoyo de las TIC en la enseñanza de las matemáticas con estudiantes de secundaria en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase.

El docente con su experiencia de doce años, luego de analizar las clases que imparte a los estudiantes de grado undécimo sobre la Derivada, se percató que la enseñanza no ha cambiado, es el docente el poseedor del conocimiento, organiza la temática, planifica la clase y dirige el aprendizaje de los alumnos. El rol de estudiante está condicionado por unas características anteriormente fijadas y muy frecuentemente regidas por el programa educativo elaborado; siendo este un receptor pasivo para aprender lo enseñado y activo para reproducir el conocimiento inducido. Con esta información se creó un texto escolar sobre La Derivada con apoyo de las TIC, desde un enfoque socio-constructivista al tenor de los aprendizajes autónomo, basado en problemas y colaborativo.

Una vez creado el texto escolar sobre La Derivada con apoyo de las TIC, específicamente el programa Geogebra se utilizó con estudiantes del grado 11C de la Institución Educativa Instituto Mistrató y se valoró su uso y pertinencia en la enseñanza de la matemática así como los resultados de aprendizaje en los estudiantes.

Palabras claves: texto escolar, enseñanza de la derivada, registros de representación semiótica, conocimiento didáctico del contenido, tecnologías de la información y la comunicación TIC.

ABSTRACT

This grade project supports the research project that seeks to determine the didactic contributions of school textbooks with the support of TIC in the teaching of mathematics with secondary students in terms of use, creation of educational material and adaptation of educational resources to the context and communicative strategies in the classroom.

The teacher with her experience of twelve years, after analyzing the classes that imparts to the students of eleventh grade on the derivative, realizes that the teaching has not changed, the teacher is the possessor of the knowledge, organizes the thematic, plans the class and directs students' learning.

The role of the student is conditioned by characteristics previously fixed and very often governed by the educational program elaborated; This being, a passive receiver to learn what is taught and active to reproduce the induced knowledge.

With this information a school text was created on the derivative with the support of TIC, from a socio-constructivist approach to the tenor of autonomous learning, based on problems and collaborative.

Once the school text on the derivative was created with support from TIC, specifically the Geogebra program, it was used with students of the 11C degree of the educational institution Instituto Mistrató and it was valued its use and relevance in the teaching of the mathematics as well as the student learning outcomes.

Keywords: scholastic text, education of the derived one, registries of semiotic representation, didactic knowledge of the content, technologies of the information and the communication TIC.

INTRODUCCION

Este proyecto se realiza en el marco del macroproyecto “textos escolares con ayuda de las TIC para la enseñanza de las matemáticas”. Busca determinar los aportes didácticos de los textos escolares con apoyo de las TIC en la enseñanza de la derivada a estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Instituto Mistrató, en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase.

Para nuestro estudio, la investigación es de tipo cualitativa (Cerde, 2007), se tomó como aspecto para su desarrollo los elementos de análisis didáctico del contenido, propuesta que desarrollo Shulman. Este método de investigación nos sirve para reconocer el aprendizaje de los estudiantes con el uso del texto escolar con ayuda de las TIC creado bajo el enfoque pedagógico socioconstructivista, y el soporte metodológico de las teorías de aprendizaje autónomo (AA), colaborativo (AC), basado en problemas (ABP) y los registros de representación semiótica de Reymon Duval. Para realizarlo, es necesario apoyarnos en la teoría de Shulman que nos permite reconocer características de los contenidos y la enseñanza dentro de los sujetos a los cuales se les realizan las prácticas pedagógicas.

1. CAPÍTULO 1 PLANTEAMIENTO, JUSTIFICACION Y ANALISIS DEL PROBLEMA DE ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza en general, se encuentra permeada por diversos enfoques y modelos de enseñanza. Es así, como existen enfoques de corte constructivista, cognitivo y social. En muchos de estos se tiene en cuenta el sujeto como elemento esencial en el proceso de aprendizaje, mientras que otros se centran en lo cognitivo, como la base de los condicionamientos que para ello se puedan dar. Piaget y Vygotsky, son los referentes de las teorías constructivistas y socio constructivista. La primera se basa en lo cognitivo y para ello, toma referentes esenciales como referentes, las mediaciones, la experiencia, la acomodación y los nuevos conocimientos. En este enfoque se abordan unas facetas de desarrollo del pensamiento y la caracteriza como concretas y abstractas hasta llegar al pensamiento formal. También expresa que los individuos, alcanzan estos niveles en edades más o menos parecidos.

Por otro lado existe una concepción del aprendizaje donde el lenguaje y la cultura juegan un papel fundamental en el aprendizaje. Bajo esta perspectiva se considera que los sujetos aprenden cuando entran en interacción con otros. En estas interacciones se ponen en juego una serie de conocimientos que los sujetos han desarrollado con la experiencia pero también se pueden aprender unos nuevos mediante la enseñanza. En sí, Vygotsky plantea que los procesos de aprendizaje ocurren como procesos de asimilación de la cultura y el conocimiento de un grupo

social al que pertenece el individuo, ocurren siempre de afuera hacia adentro, como un proceso de interiorización que permite la transformación de las funciones psicológicas y en general del pensamiento (Delgado, 2013)

La historia del enfoque histórico-cultural del aprendizaje inicia con la revolución rusa y es una expresión en la educación del marxismo que se vivía para ese momento en la unión soviética. Para muchos teóricos, las sociedades colectivas de la época sirvieron como referente para las ideas de Vygotsky, con la cual este autor logro consolidar aspectos de orden psicológico, como se concibió inicialmente. Totalmente contradictorio a los planteamientos de Piaget, plantea el medio social como referente de aprendizaje de conductas y una serie de conocimientos. En general se plantea que *“En realidad su teoría educacional es una teoría de transmisión cultural como también una teoría de desarrollo. Ya que ‘educación’ no sólo implica para Vygotsky el desarrollo del potencial del individuo sino también la expresión y el crecimiento históricos de la cultura humana de la que surge el Hombre”* (Bruner, 1987)

1.1.1. Pregunta De Investigación

¿Qué aportes didácticos ofrece el uso de los textos escolares con apoyo de las TIC en la enseñanza de La Derivada con estudiantes del grado 11C de la Institución Educativa Instituto Mistrató en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase?

1.2. OBJETIVOS

En este aparte se exponen los objetivos que guiarán el desarrollo de este proceso investigativo

1.2.1. Objetivo general

Determinar los aportes didácticos que ofrece el uso de textos escolares con apoyo de las TIC en la enseñanza de la Derivada con estudiantes del grado undécimo de la institución educativa **Instituto Mistrató** en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase

1.2.2. Objetivos específicos

- Diseñar un modelo pedagógico para la enseñanza de la derivada en el aula de clase del grado undécimo de la institución educativa Instituto Mistrató.
- Elaborar un texto escolar con apoyo de las TIC para el proceso de la enseñanza de la Derivada
- Aplicar una unidad didáctica con uso del texto escolar con apoyo de las TIC en clase para valorar sus aportes didácticos desde los registros de representación semiótica.

1.3. JUSTIFICACIÓN

En la enseñanza de las matemáticas tradicionalmente el docente guía al estudiante hacia el logro de un objetivo instruccional, que consiste en una transmisión de saberes en donde se utiliza el refuerzo como herramienta para incentivar el aprendizaje en los estudiantes (Reigeluth, 2016). Después de analizar el video realizado por la docente Luz Elena Muñoz Vallejo en el mes de marzo del año 2017 a un grupo inicial de estudiantes del grado 11 donde el propósito de este, era analizar la forma de enseñanza de la derivada donde se explica el concepto de ésta, encontramos que a pesar de los esfuerzos por tratar de cambiar la tradición seguimos enseñando como lo hicieron con nosotros. En este sentido el conocimiento del estudiante desde la CDC en los procesos de aprendizaje son importantes, con ello es necesario incorporar en la práctica

docente los diferentes errores, preconcepciones y concepciones de los estudiantes y las condiciones instruccionales necesarias para un aprendizaje adecuado. (Gonzales, 2008)

El docente es el poseedor del conocimiento, organiza la temática, planifica la clase y dirige el aprendizaje de los alumnos, siendo su principal auxiliar el Libro de Texto. El rol de estudiante está condicionado por unas características anteriormente fijadas y muy frecuentemente regidas por el programa educativo elaborado; siendo este un receptor pasivo para aprender lo enseñado y activo para reproducir el conocimiento inducido. (Aguilera, 2007)

En la actualidad se están utilizando herramientas tecnológicas de tipo audiovisual sin un componente pedagógico en las aulas de clase como medio didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje pero estas no se extienden más allá de la proyección de un contenido que finalmente reemplaza el marcador y el tablero, pero el sistema sigue siendo el mismo, sin despertar un mayor interés en el alumno.

Puntualmente en la enseñanza de la derivada, la cual es un concepto bastante complejo para los estudiantes, de difícil comprensión, ya que como lo plantea (Lozano, 2011) en el aprendizaje de la derivada se presentan obstáculos de origen epistemológico y didáctico que pueden llevar a errores en el aprendizaje de éste, además plantea diferentes enfoques para la enseñanza de la derivada que pueden influir en la percepción de los estudiantes hacia el objeto matemático de estudio. (Godino, Fundamentos de la Enseñanza y Aprendizaje para Maestros, 2003)

1.4. ANTECEDENTES

Según los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN *“Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas”*; y los derechos básicos de competencias *“Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos”*. Sobre el concepto de derivada se han encontrado varios proyectos entre los cuales destacamos los siguientes:

- **Una Propuesta Para La Introducción Del Concepto De Derivada Desde La Variación** de Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller; quienes diseñaron una secuencia didáctica con el fin de desarrollar habilidades en los estudiantes de Ingeniería Agronómica, relacionadas con las variables, las funciones y la variación. Luego de hacer un análisis a los resultados obtenidos las autoras reflexionaron sobre lo obtenido y se resalta la siguiente: *“La formación de las nociones de variable, función y derivada se basan en el entendimiento de los procesos de cambio, fundamentales para el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional. Un escaso desarrollo de los procesos de*

cambio impedirá lograr profundidad en las concepciones relativas al cálculo. Este desarrollo no se logra de manera instantánea, es necesaria una preparación adecuada”.

- **La Función Derivada A Partir De Una Visualización De La Linealidad Local** de Robles, M.G., Del Castillo, Universidad de Sonora A.G., Font, V., Universidad de Barcelona. Los autores realizaron una actividad didáctica integrando el Applet Linealizador para lograr un análisis descriptivo-explicativo, a lo cual concluyeron que: *“El análisis didáctico realizado ha permitido, por una parte, explicar las limitaciones de los significados personales de los alumnos y, por la otra, hacer una valoración del proceso de instrucción que permite concluir, por ejemplo, que éste tuvo una idoneidad cognitiva elevada para los cinco estudiantes que conformaron el estudio de casos. Dicha valoración nos da elementos para una mejora en las futuras implementaciones”*
- **Una Propuesta Para La Enseñanza De La Derivada Como Razón De Cambio A Estudiantes De Grado Undécimo.** Robinson Alfonso Cardona Aguirre. Universidad Nacional de Colombia 2012. El autor realiza una propuesta didáctica donde se destaca la importancia que tiene el concepto de razón de cambio y como este puede servir como fundamento en el avance de la comprensión del cálculo. Concluyendo que: *“El desarrollo de los conceptos de la derivada como razón de cambio y sus preconceptos, nos permiten darnos una idea de las diferentes formas en el cual este se presenta en el aula de clase, de ahí la importancia que tiene el docente en escoger el concepto más apropiado de acuerdo a su contexto para ser enseñando. De estas diferencias entre los conceptos se desarrollaron las actividades partiendo de los preconceptos los cuales le*

deben permitir al estudiante una mejor comprensión y apropiación del concepto de derivada como razón de cambio, en los cuales se tuvieron en cuenta varios aspectos, lo gráfico, lo conceptual y la resolución de problemas en la vida diaria, en los que se presenta variación y cambio”.

- ***La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia***, tesis doctoral de Edelmira Rosa Badillo Muñoz, de la Universidad autónoma de Barcelona en el año 2003, quien tenía como objetivo relacionar el conocimiento del contenido matemático con el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas.
- ***“Derivadas en la vida Cotidiana”*** que es un trabajo de fin de estudios universitarios de Luisa Quesada Barrioseta de la Universidad de la Rioja en el año 2014. Quien luego de diseñar una secuencia didáctica y aplicarla durante varias semanas concluyó que al introducir cambios en la rutina de las clases, tales como: *Trabajar con ejemplos sacados de la vida real o utilizar herramientas informáticas, conseguimos captar la atención de los alumnos y que aumente su motivación en la asignatura de matemáticas.*
- ***Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada*** que es un trabajo de investigación de María del Socorro García González y Crisólogo Dolores Flores en el año 2016 quienes concluyeron que “La puesta en escena de la SA diseñada ha permitido confirmar en esta investigación que ante una de las tantas dificultades que puede haber en el aula de clases, en este caso, la escasa comprensión de un concepto, el

trabajo del profesor como principal actor que busca en su labor aminorar estos inconvenientes en sus estudiantes va más allá de diseñar y proporcionar herramientas con las que los estudiantes puedan trabajar y como lo propugna el constructivismo vayan construyendo su “propio conocimiento”, sino junto con las herramientas debe involucrarse a los estudiantes para que sean ellos quienes en interacción con sus pares y el propio profesor se responsabilicen de su “propio conocimiento”.

2. CAPITULO 2.

MARCO TEÓRICO

En este se describen los fundamentos teóricos que permiten sustentar la presente investigación, presentando los aspectos y características más relevantes del enfoque pedagógico seleccionado, el socioconstructivismo, y el soporte metodológico de las teorías de aprendizaje autónomo (AA), colaborativo (AC) y basado en problemas (ABP). También se hace una revisión bibliográfica exhaustiva de las categorías conceptuales contenidas en esta propuesta: los aportes didácticos que ofrece el uso de textos escolares con apoyo de las TIC en la enseñanza de las matemáticas con estudiantes de secundaria en lo referente al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias educativas en el aula de clase.

2.1. ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA

2.1.1. Constructivismo Social

(Vigotsky L. , 1978) es considerado el precursor del constructivismo social el cual sustenta que el estudiante puede sentir, imaginar, recordar o construir un nuevo conocimiento, si tiene un conocimiento previo donde se ancle; el cual es determinante para adquirir cualquier aprendizaje. El docente desarrolla el papel de mediador, su tarea principal será la de amplificar conocimientos, habilidades y actitudes a partir de las que cada estudiante tiene almacenadas y apoyarlo para que logre conectarlos con los nuevos aprendizajes, facilitando la construcción colaborativa de conocimientos y valores socialmente respaldados.

La construcción de conocimientos se producirá como el resultado del intercambio de significados entre los estudiantes que intervienen en el proceso de aprendizaje. Podemos afirmar

entonces que el aprendizaje es activo, significativo, con pertinencia cultural y se adecúa al nivel de desarrollo de los estudiantes.

Se ha malinterpretado la aplicación del constructivismo dejando solo al estudiante, aduciendo que él es el quién debe construir el aprendizaje. En el constructivismo social es claro que el reto del docente está en que el estudiante logre avanzar con el apoyo de la relación social con sus pares y la ayuda necesaria hacia nuevas zonas de desarrollo próximas, ampliando cada vez más su zona de desarrollo.

2.1.2. Características del Constructivismo Social

- Saberes previos del niño/a que le permiten realizar nuevas tareas o construir nuevos conocimientos.
- Se requiere de un entorno social ya que es un proceso social.
- Selección de un andamiaje o mediación que facilite la construcción colaborativa de conocimientos
- Escuchar al niño/a y pedirle que represente, comunique o intercambie los significados que ha construido
- Propiciar conflictos cognitivos

2.2. TEORÍAS DE APRENDIZAJE

Las teorías de aprendizaje ayudan a comprender, predecir y controlar el comportamiento de los estudiantes, elaborando a su vez estrategias de aprendizaje y tratando de explicar cómo

acceden al conocimiento. Su objeto de estudio se centra en la adquisición de destrezas y habilidades en el razonamiento y en la adquisición de conceptos.

2.2.1. Aprendizaje Autónomo

El aprendizaje autónomo es un proceso constructivista en el cual el estudiante construye sus conocimientos a partir de conocimientos previos mostrando interés por aprender y siendo consciente de que para alcanzar este conocimiento es necesario que ponga el máximo esfuerzo y lo mejor de sí mismo y hacerlo por los propios medios en el tiempo asignado o que el mismo decida. (Romero, 2009)

En el documento “*Aproximación al diseño de titulaciones basado en competencias*”, los objetivos de la competencia “aprendizaje autónomo” se pueden distribuir, por ejemplo, en los tres niveles en que se gradúa el autoaprendizaje, desde el aprendizaje dirigido pasando por el aprendizaje guiado, hasta el aprendizaje autónomo, Se debe pensar que no todos los estudiantes tiene las herramientas necesarias para aprender por sí mismo o valorar si la información que obtiene de manera autónoma, es fiable o relevante en relación con el conocimiento que pretende obtener, y hay que darle pautas que le permitan evaluar la consistencia de aquello que aprende.

2.2.2. Características Del Aprendizaje Autónomo

- Motivación, responsabilidad, autonomía, disposición hacia el aprendizaje
- Se deben realizar aportes colaborativos
- Se brinda la posibilidad de recrear conceptos previos y asimilarlos con los nuevos que va adquiriendo

- Se debe posibilitar una comunicación expresiva con el tutor o los compañeros.
- Posibilita al educando organizar adecuadamente su tiempo

2.2.3. Aprendizaje Colaborativo (AC)

El aprendizaje colaborativo es un método didáctico que promueve el aprendizaje centrado en el alumno basando el trabajo en pequeños grupos, donde los estudiantes con diferentes niveles de habilidad utilizan una variedad de actividades de aprendizaje para mejorar su entendimiento sobre un tema. Cada miembro del grupo de trabajo es responsable no solo de su aprendizaje, sino de ayudar a sus compañeros a aprender, creando con ello una atmósfera de logro. (Lara & Rosamary , 2005)

2.2.4. Características de Aprendizaje Colaborativo (AC)

- Los recursos: Deben estar al alcance de los estudiantes para lograr los objetivos planteados, estos pueden ser tecnológicos: equipos de cómputo, software, internet; físicos: espacios adecuados como salones, laboratorios, biblioteca, entre otros.
- La interactividad entre las partes. Se aprende de la reflexión común, del intercambio de ideas, del analizar entre dos y más un tema común, a través de lo cual se obtiene un resultado enriquecido. La importancia de esta interacción está centrada en el grado de influencia que tiene la interacción en el proceso cognitivo y de aprendizaje del compañero.
- La sincronía de la interacción. Esta sincronía es la que defienden algunos teóricos al referirse a la colaboración afirmando que es “una actividad coordinada y sincrónica,

que surge como resultado de un intento continuo por construir y mantener una concepción compartida de un problema”

- La negociación: La negociación es un elemento distintivo de las interacciones colaborativas, y tiene especial importancia cuando se trata de negociar significados. Sin negociación el diálogo se transforma en un monólogo, a la vez que la función del interlocutor se reduce a la de un simple receptor de mensaje.
- La Evaluación: De parte del profesor se presenta una retroalimentación sobre conceptos y aplicaciones. Los estudiantes pueden realizar una auto-evaluación donde realiza una reflexión sobre sus logros y una coevaluación donde los estudiantes tienen la oportunidad de retroalimentar sobre sus méritos y aportes individuales con el fin de promover la cooperación al reconocer sus responsabilidades.

2.2.5. Aprendizaje basado en problemas (ABP)

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es un método de enseñanza-aprendizaje que se centra en el estudiante en el que éste adquiere conocimientos, habilidades y actitudes a través de diferentes situaciones; se pretende que éste construya su conocimiento sobre la base de problemas y situaciones de la vida real. (Fernández, 2016)

La característica más innovadora del ABP es el uso de problemas como punto de partida para la adquisición de conocimientos nuevos y la concepción del estudiante como protagonista de la gestión de su aprendizaje.

2.2.6. Características de Aprendizaje basado en problemas (ABP)

- Los conocimientos de los que ya disponen los alumnos deben ser suficientes y les ayudarán a construir los nuevos aprendizajes que se proponen en el problema.
- Surgen debates y preguntas que acabarán siendo usados como objetivos de aprendizaje
- Favorece la posibilidad de interrelacionar distintas materias o disciplinas académicas
- El contexto y el entorno debe favorecer el trabajo autónomo y en equipo que los alumnos llevarán a cabo (comunicación con docentes, acceso a fuentes de información, espacios suficientes, entre otros.)
- Establecer un tiempo y especificarlo para que los alumnos resuelvan el problema y puedan organizarse

2.3. CONOCIMIENTO DIDACTICO DEL PROFESOR

(Shulman, 1987) Considera “...debe existir un «conocimiento base para la enseñanza» esto es, un conjunto codificado o codificable de conocimientos, destrezas, comprensión y tecnología, de ética y disposición, de responsabilidad colectiva, al igual que un medio para representarlo y comunicarlo” (p.5); conocimiento que debe orientar el quehacer del docente en el aula. El autor propone categorías de conocimientos que un maestro debería tener:

- Conocimiento del contenido, la disciplina a enseñar, en este caso las matemáticas.

- Conocimiento didáctico general, relacionado con la gestión de la clase, control de normas sociales, relaciones con los niños, estrategias de motivación y organización de la clase.
- Conocimiento del currículo, organización de las temáticas, secuenciación de los contenidos, utilización de los materiales y recursos, planeaciones, evaluación y seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Conocimiento de los alumnos, del contexto, de sus necesidades, intereses, expectativas y de sus características.
- Conocimiento de los aspectos teleológicos de la institución educativa donde desempeña su labor docente.
- Conocimiento pedagógico del contenido (PCK), entramado entre la disciplina de estudio y la pedagogía; tiene que ver con la didáctica, el uso de estrategias de aprendizaje y los mediadores del proceso de enseñanza y aprendizaje. Nuestro interés se centra en este conocimiento, que es propio del educador matemático.

2.4. CONOCIMIENTO TECNOLÓGICO, PEDAGÓGICO Y DE CONTENIDO (TPACK)

El modelo TPACK (Technological, Pedagogical And Content Knowledge) fue moldeado por (Shulman, 1987) defendiendo la relación entre el conocimiento disciplinar y pedagógico, que sólo sería (PACK). Fueron Mishra y Koehler quienes añadieron a esa teoría otro tipo de conocimiento, el conocimiento tecnológico, que debía integrarse a los otros dos conocimientos; pedagógico y del contenido. (Mishra, 2006)

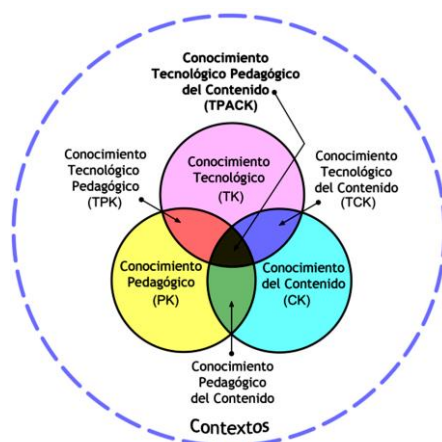


Figura 1: Modelo TPACK extraído de <http://www.tpack.org>

Así surge el modelo TPACK que resulta de la integración de estos tres conocimientos; conocimiento del contenido (disciplinar), conocimiento tecnológico y conocimiento pedagógico, es decir, el conocimiento tecnológico pedagógico del contenido.

Este modelo comprende el conocimiento, las competencias y destrezas que necesita el docente para hacer un uso efectivo de las TIC en su materia específica. Se puede decir que después de la adecuación de estos tres tipos de conocimientos, el docente adquiere experiencia en la docencia en esa materia concreta.

Al relacionar estos tres conocimientos surgen otros tres conocimientos. Éstos son (Mishra y Koehler, 2008): (Figura: 2)

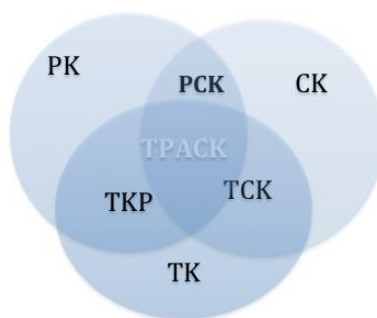


Figura 2: Tipos de conocimientos a partir de la interrelación de conocimientos básicos.

2.4.1. Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK):

Saber utilizar las TIC en un tema educativo específico. Como implementar planes cambiando el ritmo de la clase, e incluso la utilización de tutoriales, materiales realizados por el propio profesor. Conocer la existencia de funciones, componentes de diversas tecnologías para utilizarlas en la enseñanza y saber el cambio que se daría en el aula si se introdujera estas tecnologías.

2.4.2. Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK):

Saber relacionar todos los conocimientos tecnológicos que la persona tiene, para hacer un buen uso de ello. Tal es el caso de utilizar en el aula, el uso de bases de datos a desarrollar o utilizar herramientas TIC, adecuadas a la disciplina que se imparte.

2.4.3. Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK):

Conocimiento similar a la idea del conocimiento pedagógico del contenido que planteaba (Shulman, 1987). Se trata de conectar ideas, conexiones, estrategias alternativas a la docencia clásica. Transformar y buscar diferentes caminos que lleven al estudiante a alternativas de las

concepciones preestablecidas. Se puede decir que es transformar la materia en si para la docencia. Cualquier docente debería poseer los conocimientos pedagógicos para impartir docencia.

Finalmente, si relacionamos los tres conocimientos básicos (pedagógico, tecnológico y del contenido) además de los tres conocimientos que se generan de éstos (pedagógico del contenido, tecnológico del contenido y tecnológico pedagógico) se extrae el conocimiento con experiencia del docente en materia TIC, el TPACK.

2.4.4. Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK):

Descrito anteriormente, se define como conocimiento con experiencia, al saber utilizar las TIC para apoyar estrategias y métodos pedagógicos en relación a su disciplina.

2.5. CUARTETO DEL CONOCIMIENTO (KQ)

En la Universidad de Cambridge en los años 2002-4, Tim Rowland desarrolló por primera vez un marco para el análisis de la enseñanza de las matemáticas, el *Knowledge Quartet* (KQ), el cual se ha aplicado en varios contextos de investigación y formación docente, y se ha perfeccionado y desarrollado como consecuencia de ello. Tomando en cuenta a (Shulman, 1987) quien propuso una clasificación con siete categorías que formaban una base de conocimiento para la enseñanza. Mientras que cuatro de estos elementos (como el conocimiento de los propósitos y valores educativos) son genéricos, los otros tres se refieren al "conocimiento de la disciplina", que es específico del tema que se enseña. Ellos son: conocimiento de la materia, conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento curricular.

El equipo de Cambridge quería identificar, y comprender mejor, las formas en que el conocimiento del contenido de las matemáticas de los maestros de primaria, o la falta de él, es visible en su enseñanza. La clave para la solución del problema fue el reconocimiento de una asociación entre elementos de subconjuntos de 17 códigos diseñados, lo que les permitió agruparlos en cuatro categorías amplias y superordinadas, que han denominado (I) la fundación (II) la transformación (III) la conexión (IV) la contingencia. Estas cuatro unidades son las dimensiones de lo que llamaron el “cuarteto de conocimiento” Knowledge Quartet (KQ). (Rowland, 2013). Cada una de las cuatro unidades se compone de un pequeño número de subcategorías que se resumen en la siguiente tabla

Tabla 1 - El Cuarteto De Conocimiento: Dimensiones y Códigos Contributivos

Dimensión	Códigos Contributivos
<i>Fundación</i> : conocimiento y comprensión de las matemáticas en sí y de la pedagogía específica de las matemáticas, creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, los propósitos de la educación matemática y las condiciones en las que los estudiantes aprenderán mejor las matemáticas	Conciencia de propósito Adherencia al libro de texto Concentración en los procedimientos Errores de identificación Exhibición abierta del conocimiento de la materia Fundamento teórico de la pedagogía Uso de terminología matemática
<i>Transformación</i> : la presentación de ideas a los estudiantes en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones	Elección de ejemplos Elección de representación. Uso de materiales de instrucción Demostración del docente (para explicar un procedimiento)
<i>Conexión</i> : la secuencia de material para la instrucción y una conciencia de las demandas cognitivas relativas de diferentes temas y tareas	Anticipación de la complejidad Decisiones sobre la secuencia Reconocimiento de la adecuación conceptual Hacer conexiones entre procedimientos Hacer conexiones entre conceptos

<i>Contingencia:</i> la capacidad de dar respuestas coherentes, razonadas y bien informadas a eventos imprevistos y no previstos	Desviación de la agenda Respondiendo a las ideas de los estudiantes (Uso de oportunidades) Conocimiento del maestro durante la instrucción Responder a la disponibilidad de herramientas y recursos
--	--

Nota: Tomada de (Rowland, 2013). Traducción Propia

2.6. LOS TEXTOS ESCOLARES

Es sabido que textos escolares ideales y completos no existen, sin embargo, es necesario establecer unas propiedades o características que deben reunir los textos acorde con su naturaleza, su función y sus propósitos. Muchas circunstancias externas a los textos mismos inciden en el momento de escoger y evaluar un texto escolar: preparación de los docentes y de los alumnos, experiencias previas de los alumnos, contextos socioculturales, precios, enfoques metodológicos entre otros.

El editor William Mejía Botero (1999) propone algunas propiedades e indicadores que de acuerdo con su experiencia, hacen a un texto un objeto de calidad. Estos son:

- Un lenguaje escrito, idiomáticamente correcto y adaptado al usuario: vocabulario apropiado a la edad y preparación del alumno, sintaxis ajustada a su nivel lector, corrección idiomática del discurso, estilo claro, sencillo y preciso que resulte significativo, extensión y complejidad de las oraciones y párrafos que faciliten la lectura, uso dosificado de terminología técnica de cada asignatura.
- Un lenguaje gráfico apropiado: las imágenes son textos que pueden proponer una lectura distinta a la de los textos codificados lingüísticamente y, por ello, son un

lenguaje cargado de significación y no un "aspecto técnico gráfico". La calidad gráfica de un texto puede tener indicadores como: las ilustraciones complementan los textos escritos creando un balance adecuado entre la palabra y la imagen tanto para el grado escolar como para la naturaleza de la asignatura; las ilustraciones combinan lo didáctico con lo artístico; las ilustraciones son comprensibles, suficientes y de tamaño y forma adecuadas para el propósito al que sirven. Las ilustraciones aportan elementos informativos, motivadores y de relación con la realidad; La diagramación distribuye adecuadamente los elementos de la página (textos, figuras y áreas en blanco); El uso del color cumple propósitos pedagógicos y estéticos.

- Un contenido suficiente, actualizado y con validez científica para el respectivo grado escolar: datos precisos y actualizados, de acuerdo con el desarrollo de las ciencias a la que corresponde cada asignatura, así como, al grado escolar respectivo; organización coherente, gradual y sistémica de la información presentada; objetividad, validez, veracidad y cantidad de la información, de acuerdo con lo que plantea el currículo y con lo que el alumno puede procesar; segmentación de la información en capítulos, unidades, lecciones entre otras fáciles de administrar dentro de la organización escolar y que hagan previsible el contenido; adecuación del contenido al tiempo disponible para enseñarlo durante el año escolar, mecanismos que promuevan la relación entre los temas tratados y los de otras asignaturas, al igual que entre las diversas secciones del libro; empleo de títulos y subtítulos estimulantes y significativos.
- Un tratamiento pedagógico de los temas presentados: Propicia la participación activa del alumno, evitando que se convierta en un espectador pasivo o en un repetidor de

información; motiva al estudiante a aprender y a mantenerse interesado mientras trabaja con el texto; utiliza un método consistente para enseñar; promueve la relación entre lo aprendible, el medio en que se ubica el estudiante y situaciones reales; incluye actividades suficientes y variadas, para realizar dentro y fuera del aula, individualmente y en grupo; estimula procesos de análisis, creatividad y toma de posición razonada; fomenta la aplicación de criterios de autoevaluación y autocontrol; genera habilidades y actitudes que le sirven al alumno para aprender a aprender, invita al alumno a buscar información, a investigar; informa al estudiante lo que se espera que aprenda y lo evalúa con base en los resultados que debía obtener; incorpora oportunidades para que el alumno formule y valide hipótesis; presenta ayudas para el aprendizaje, tales como ejercicios, sugerencias, instrucciones, preguntas, problemas, talleres, resúmenes y evaluaciones.

- Una relación estrecha con las pautas curriculares y programáticas: se ajusta a los fines de la educación y a los fundamentos del currículo, tiene en cuenta las características y recursos de la comunidad a la cual se dirige; contribuye real y efectivamente a la formación cultural, histórica y social del educando; plantea actividades para que el alumno produzca conocimiento; fomenta actitudes de responsabilidad en el alumno, frente a sí mismo y a los demás.
- Un conjunto de valores positivos, que contribuya a la formación del educando: los textos transmiten y fomentan valores positivos como: el trabajo en equipo y la solidaridad; el dialogo y la convivencia; el respeto por los derechos de los demás; la conservación ambiental y la utilización adecuada de recursos, la construcción de una

autoimagen positiva en el estudiante; la formación de hábitos para el trabajo mental y manual; el pensamiento analítico, creativo, crítico y científico.

- Y unos rasgos físicos o materiales que soporten los elementos anteriores y que satisfagan las necesidades del profesor que escoge un texto y del alumno que lo utiliza como instrumento de aprendizaje: el tipo de letra, el largo de línea, el espacio adecuado entre letras, palabras y párrafos que haga legible el texto, márgenes adecuada, paginación, carátula atractiva y bien impresa, colores y tintas utilizadas, tipo de papel, calidad y nitidez de la impresión, calidad de la encuadernación entre otros.

La sumatoria de estos indicadores es, por lo pronto, una manera de acercarnos al texto y de tener algunos criterios claros a la hora de escoger y evaluar un texto académico. Sin embargo, no podemos desconocer que la "calidad" de un texto tiene una perspectiva polifacética ya que depende de quién lo evalúe y para que se evalúe, lo que determinará su grado de aprobación o desaprobación en un determinado contexto. (Moya, 2008)

2.7. LAS TIC Y LA EDUCACIÓN

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) son un factor esencial en la transformación de la nueva economía global y en los rápidos cambios que están tomando lugar en la sociedad. En la última década, las nuevas herramientas tecnológicas de la información y la comunicación han producido un cambio profundo en la manera en que los individuos se comunican e interactúan. También tienen el potencial de transformar la naturaleza de la educación en cuanto a dónde y cómo se produce el proceso de aprendizaje, así como de

introducir cambios en los roles de profesores y alumnos. Las TIC presentan algunas características importantes como son:

- Es una herramienta pedagógica y didáctica que aprovecha nuestra capacidad multisensorial.
- Este tipo de recursos puede provocar la transformación de los estudiantes de receptáculos pasivos de información a partícipes más activos de su proceso de aprendizaje
- Permiten al maestro revelar al alumno nuevas dimensiones de sus objetos de enseñanza, como también permite que privilegie su rol como facilitador del aprendizaje.
- El docente puede variar y enriquecer los contenidos académicos aprovechando las múltiples fuentes de internet y fomentar la capacidad de trabajo colaborativo mediante herramientas como el correo electrónico o el chat.
- Es parte integral de la educación moderna ya que se convierte en una herramienta de uso comunitario que facilita el desarrollo de actividades escolares colaborativas, desde cualquiera de las áreas temáticas del currículo.
- La actividad tecnológica implica el desarrollo y crecimiento del talento humano como un proceso cooperativo, espontáneo y efectivo.
- Las opciones pedagógicas y didácticas apoyadas en las TIC estimulan y ofrecen condiciones para el aprendizaje exploratorio.

2.7.1. Uso Del Geogebra

GeoGebra es un software interactivo de libre uso, que reúne dinámicamente la geometría, el álgebra y el cálculo. Ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una Vista gráfica, una Numérica, una Vista algebraica y, además, una Vista de hoja de cálculo. (Valbuena, 2015) Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas y secciones cónicas como con funciones que después se pueden modificar dinámicamente. También se pueden introducir ecuaciones y coordenadas directamente; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático. Las expresiones algebraicas corresponden con un objeto de la zona gráfica y viceversa, potenciando de esta manera la construcción de conceptos desde distintos registros de representación. (Saidon, 2005)

2.7.2. Uso De Los Codigos QR

Los códigos QR hacen referencia al término *Quick Response Barcode*. Tecnología que permite cifrar, de forma rápida, texto plano en formato de código de barras. Su nombre proviene de la frase *Quick Response* (respuesta rápida) ya que se diseñó para ser decodificado a alta velocidad. Los códigos QR son un *mobile tag*, es decir, un conjunto de imágenes bidimensionales que se decodifican con un teléfono móvil y que permiten dar información más directa al usuario. Estos códigos QR son una manera muy práctica de agrupar información y obtenerla. Su éxito se debe a su estándar abierto y a su uso asociado con los teléfonos móviles (Vila, 2013).

2.8. REGISTROS DE REPRESENTACION SEMIOTICA

Raymond Duval, profesor de la Universidad del Litoral y director de estudios de la Academia de Lila, Francia, consolidó su trayectoria investigativa en el Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo) a través tanto de amplias observaciones de las actividades de docentes y alumnos en cursos de matemáticas como del diseño de clases experimentales. El análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento que presenta en el libro, sistematiza su trabajo y sus consideraciones en torno a las investigaciones realizadas en psicología cognitiva y en inteligencia artificial.

Dichos análisis conciernen, en particular la representación, la conceptualización, el razonamiento (argumentación, demostración, utilización de lenguajes formales), la interpretación de figuras, la comprensión de textos y la resolución de problemas. El autor los presenta a través de resultados de evaluaciones y los aborda desde una perspectiva funcional que le permite defender su hipótesis de base: no hay noesis (intelección) sin semiosis (producción de representaciones semióticas).

De acuerdo con el autor, hay por lo menos dos características típicas de la actividad cognitiva propia de los procedimientos matemáticos que marcan una diferencia con la actividad cognitiva para el aprendizaje de otras disciplinas y que la constituyen en un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades intelectuales humanas.

En primer lugar, se recurre a varios registros semióticos de representación, algunos de los cuales han sido desarrollados específicamente para efectuar tratamientos matemáticos (v.g. el álgebra,

sistema de numeración posicional, entre otros.). Por otra parte, los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción, como podrían serlo la mayoría de objetos de otras disciplinas: la designación de los objetos matemáticos pasa necesariamente por un registro semiótico de representación.

El conocimiento matemático, pues, tiene unas características propias que hace que no sea posible el acceso a este conocimiento sin el recurso a una variedad de registros de representación, entre los cuales la lengua materna, no obstante ser el registro semiótico por excelencia, no es más que uno entre otros que, por lo demás, y al igual que estos otros, no es autosuficiente para movilizar conocimiento matemático.

(Duval, 2004) plantea dos preguntas que considera constituyen el núcleo del aprendizaje de las matemáticas: ¿Cómo se aprende a cambiar de registro? y ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone? Según él, muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones. Las características más relevantes de su trabajo son:

- Presencia de una representación identificable
- Usar más de un registro de representación
- Realizar el tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada
- Considerar el análisis de la producción de los estudiantes

2.9. LA DERIVADA

En matemática, la derivada de una función mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente

2.9.1. La enseñanza y el aprendizaje de la derivada

(Lozano, 2011) Plantea el aprendizaje de la derivada desde diferentes concepciones. En este sentido ha planteado diversos aspectos de la derivación que deben ser de cuidado en los procesos en los cuales está inmerso el objeto matemático (Godino, 2003). Así, queda el concepto de la derivada desde lo geométrico, formal, cociente incremental, método de fluxiones y la derivada desde la física.

También en el estudio de la derivada se tiene en cuenta diversos enfoques los cuales resultan de lo histórico y hermenéutico del objeto matemático abordado desde las concepciones de diversos autores. Así la enseñanza de la misma parte lo algebraico, lo numérico, lo formal asociado a todas las definiciones que se dan alrededor del estudio de la derivada, la aproximación afín focal, el enfoque geométrico, variacional y computacional.

Para el caso del estudio de este proyecto de tesis se ha abordado el enfoque geométrico, numérico y algebraico, que permiten reconocer el objeto matemático desde tres aristas diferentes, ayudados por el texto que se produce para evaluar su impacto en la clase.

La definición de la derivada planteada (Lozano, 2011) corresponde al límite es un valor al cual se aproxima una función $f(x)$, dependiendo del valor al cual se acerque x .

Al calcular el límite de la carga eléctrica en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, se obtiene la corriente en un instante de tiempo dado. Dentro de la estructura del proyecto de investigación la definición para este caso está dada por el acercamiento anterior. Se llama razón promedio de cambio de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ al cociente de la variación de las ordenadas de los puntos extremos del intervalo, entre la variación de sus abscisas, o sea es la razón del incremento de la y con respecto al incremento de la x . A esa razón la vamos a denominar δ . (Pecharromán, 2014) plantea que los signos y símbolos hacen de importante la utilización de este objeto matemático de importancia en el cálculo matemático. En este orden de ideas es importante porque la derivada como idea central del cálculo diferencial, se considera una de las herramientas más poderosas de la matemática, por tal razón el manejo de este concepto permitió y permite al hombre resolver interrogantes de su entorno, para alcanzar su manejo comencemos a recordar los conceptos básicos para manipular adecuadamente la derivación

En los libros de cálculo la definición de la derivada desde diversas concepciones se puede establecer las siguientes:

En el libro de cálculo de Schaum se define como incremento de una variable es el valor que esta experimenta. Este concepto es el más formal y de perspectiva algebraica. Mientras tanto, la definición de la derivada en el libro de Swokowsky tiene un carácter geométrico al definir la derivada asociándola con el concepto de recta tangente y secante a la curva. El libro de cálculo de leithold reconoce la derivada desde lo numérico y como tasa de variación.

En conclusión algunas de las definiciones expresadas en el texto apoyado con las Tics realizado en el marco de este proyecto reconocen los elementos tanto numéricos, variacional,

procedimental y geométrico de la derivada como objeto matemático para el aprendizaje en los estudiantes de grado undécimo del Instituto Mistrató

2.9.2. Registro de representación de la derivada

En matemáticas encontramos diversos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas, para los objetos, expresiones algebraicas, entre otras. Este, es un entramado de situaciones que forman parte del lenguaje de un área que es muy amplio pues comprendido por todos que los lineamientos han definido cinco tipos de pensamiento matemático, lo que aumenta las perspectivas de un lenguaje más amplio en cada uno de ellos. De este modo, el aprendizaje requiere relevancia cuando se presentan los lenguajes posibles con los cuales se pueden expresar los objetos matemáticos a tratar. (Duval R. , 1999) reconoce que los objetos matemáticos no pueden ser captados directamente por los sentidos, es necesario utilizar representaciones que puedan mediar con esos objetos matemáticos.

Al introducir el concepto de la derivada en nuestra investigación desde medios tecnológicos, es necesario reconocer las formas como esta se puede representar y las modalidades de conversión que se pueden dar. En este sentido las tareas ofrecen la posibilidad de representar el objeto matemático y hacer las transformaciones, por medio de usos diferentes mediadores. En este sentido (Duval R. , 1999) plantea que un mismo objeto matemático presenta varias representaciones. En el lenguaje propio de la comunicación un concepto relacionado con la derivada puede presentarse en el lenguaje verbal pero a su vez tiene otras representaciones como son la algebraica, grafica, tabular, entre otras. Así, el aprendizaje es más efectivo cuando

se presenta en diferentes representaciones y en lo posible se hacen conversiones y/o transformaciones entre ellos.

(Duval R. , 1993) Atribuye el termino noética como la adquisición de un concepto matemático por parte de los estudiantes. Sin embargo considera que no hay noética sin semiótica. En este sentido se plantea que es muy difícil el aprendizaje sin diversas representaciones de los objetos debidamente coordinados.

Según (Duval R. , 1993) es necesario tener más de una representación semiótica sobre los objetos matemáticos tratados, además la creación de nuevos sistemas semióticos en símbolos constituye la base para el progreso del conocimiento. En el estudio de la derivada, existen diversas representaciones que se pueden convertir o transformar en otras y en los cuales juega un papel central como mediadores, las ayudas tecnológicas que estamos proponiendo.

(Oviedo & Kanashiro, 2012) *Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:*

1) La presencia de una representación identificable.

2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.

3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...”. Es decir con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones. (p32.)

Dentro del proyecto es necesario reconocer que objetos presentes son representaciones semióticas y cuáles de ellas se pueden catalogar como registros semióticos. Así, una representación semiótica, se puede identificar dentro de un registro porque corresponde a la forma como se va configurando a partir de ellas el mismo registro matemático del cual se está hablando. Mediante un ejemplo se pueden constituir todas las representaciones semióticas que surgen de un registro sobre la derivada. Para tal caso la forma como se define, la escritura algebraica, la representación gráfica, entre otros, constituyen representaciones semióticas de un registro que puede ser una tarea u otra actividad relacionada con el objeto matemático y que constituya cognición para los estudiantes.

En el estudio de la derivada se reconocen diferentes interpretaciones que se le han dado a ésta, como es la interpretación geométrica a partir de la cual se puede establecer si una función es derivable en un punto a través del análisis de su gráfica y la interpretación como razón de cambio instantánea que está relacionada con la representación simbólica (algebraica). (Orjuela, 2011)

La interpretación geométrica de la derivada se refiere a la pendiente de la recta tangente a la curva (función), en un punto del dominio de la misma función.

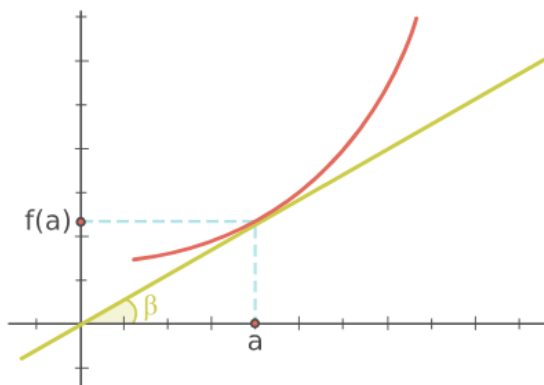


Figura 3. Tomada de <https://www.sangakoo.com/es/temas/interpretacion-geometrica-de-la-derivada>

La recta dibujada forma un cierto ángulo β que estará relacionado con la pendiente de la recta, cuyo valor es la derivada en el punto de tangencia.

$$\tan\beta = m = f'(a)$$

El programa GeoGebra nos permite observar como al variar los extremos del intervalo, la recta tangente se mueve a lo largo de la curva variando su pendiente y nos proporciona imágenes con movimiento que facilitan la visualización que resultaría muy dispendiosa al representar todas las rectas en forma manual. (Benedicto, 2012)

Algebraicamente cuando se quiere tener información de la derivada en todos los puntos de un intervalo a la vez, no se puede calcular la derivada punto a punto, pues existen infinitos. Se debe recurrir entonces a la función derivada que asigna a cada punto el valor de la derivada en este y se define como sigue:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Los matemáticos del siglo XVII encontraron que muchos problemas, particularmente los que implicaban determinar la *intensidad del cambio instantáneo* de una variable con respecto a otra, también podrían resolverse utilizando el mismo concepto de la función derivada (Vidal, 2012).

Podrían calcularse todas las derivadas empleando la definición de derivada como un límite, pero existen reglas bien establecidas, conocidas como teoremas para el cálculo de derivadas, las cuales permiten determinar la derivada de muchas funciones de acuerdo a su forma sin tener que calcular forzosamente el límite. Las representaciones simbólicas: digitales, discretas, se basan en

signos alfanuméricos estructurados con sus propias reglas de sintaxis (Gavilán, 2010). Como por ejemplo el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una función en el punto a :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Los investigadores en el campo de las matemáticas del nivel medio coinciden en que, cantidades representativas de estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante reglas de derivación, pero difícilmente comprenden el para qué de esos algoritmos que realizan y el significado de los conceptos. Inclusive, difícilmente logran asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación. (Dolores, 2000)

3. CAPITULO 3. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

El método de investigación para este trabajo es de corte cualitativo, pues se trata de describir e interpretar la forma como los estudiantes llegan al aprendizaje de un objeto matemático. (Buendia, 1998) establece este método de investigación como la adaptación de esta en la educación desde otros campos, además expresa que la educación como un ámbito de estudio y no una disciplina debe apoyarse en ella. Para nuestro estudio, este método de investigación nos sirve para reconocer el aprendizaje con diversas aplicaciones que puede darse en el proceso como tal. Para realizarlo, es necesario apoyarnos en la teoría de Shulman que nos permite reconocer características de los contenidos y la enseñanza dentro de los sujetos a los cuales se les realizan las prácticas pedagógicas.

3.1. MARCO METODOLÓGICO

La presente investigación de tipo cualitativa (Cerdeña, 2007), se tomó como aspecto para su desarrollo los elementos de análisis didáctico del contenido, propuesta que desarrollo Shulman. Dentro de esta se distinguen cuatro fases que se definen a continuación.

Estudio preliminar: este debe estar asociado con las actividades didácticas que se propondrán a los estudiantes. Dentro de las categorías del análisis de contenido del docente mediado por las Tics.

Diseño de la una guía apoyada por las tics: en esta etapa se seleccionaran las actividades

y registros que se llevan a los estudiantes y se organizan las actividades de acuerdo a las propuestas de enseñanza activa desarrolladas en el marco teórico.

Implementación: presentación de las situaciones a los estudiantes relacionados con la derivada, luego se grabaran las clases para hacer análisis posteriores de acuerdo con las categorías que se tomen dentro de la metodología de análisis

Evaluación y análisis: para la evaluación y análisis de la implementación de la secuencia didáctica y los aspectos que se relacionan con el contenido didáctico del maestro desde las Tics

Esta investigación es de tipo cualitativa interpretativa. En ella se trata de analizar un fenómeno social relacionado con el aprendizaje del cual se pueden obtener algunos resultados frente a una teoría del análisis didáctico del contenido. Además se hará teniendo en cuenta los elementos epistemológicos del objeto de investigación. Con ello se pretendió:

- Aplicar un modelo de guía con ayuda de las TICs para evidenciar desde las prácticas de aula la incidencia de esta desde el contenido didáctico del profesor
- Utilizar la teoría del contenido didáctico del profesor para realizar el análisis de las clases. Desde esta metodología se pretende dar respuestas a los interrogantes de como una guía puede ser mediada por las tics con ayuda del docente

La población que se utilizara en esta investigación serán 35 estudiantes del grado once C del Instituto Mistrató.

3.2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Dentro de los aspectos planteados en la metodología para el proyecto de investigación se iniciará con actividades diagnosticas preliminares esto permitirá determinar qué tipo de actividades didácticas se presentaran a los estudiantes.

Para ello la preparación de la actividad consiste en el reconocimiento del objeto matemático desde análisis del contenido didáctico del docente

El propósito fundamental de esta investigación es generar aprendizaje por medio de uso de un texto mediado por las tecnologías de la información y la comunicación. Además reconocer los obstáculos que pueden presentarse en el proceso de aprendizaje y enseñanza. En este sentido es necesario hacer una evaluación de los contenidos y el uso que el docente puede hacer de ellos.

La presente investigación se realiza en un grupo de grado undécimo de la Institución Educativa Instituto Mistrató. Esta institución es de carácter oficial la cual cuenta con un total de 1461 estudiantes, en todos los niveles de educación; preescolar, básica ciclo primaria y secundaria, educación media, educación rural y postprimaria rural con el modelo escuela nueva. Esta última se divide en cuatro modalidades actualmente; administración de empresas agropecuarias, guianza turística, programación de software y comercialización de alimentos. El grupo escogido es de 35 estudiantes los cuales están en la modalidad de administración de empresas agropecuarias.

Es un tipo de investigación de tipo cualitativo desde un referente del análisis del contenido didáctico del profesor bajo el supuesto de que el aprendizaje de las matemáticas se verá mediada por referentes de tipo discursivo y analítico que hacen parte del análisis desde los presupuestos de (Shulman, 1987).

3.2.1. Contexto y sujetos de estudio

La institución donde se realizara la investigación será la Institución Educativa Instituto Mistrató del municipio de Mistrató Risaralda. Esta institución con 56 años de historia ha visto pasar una gran cantidad de estudiantes que ha derivado en una gama muy importante de profesionales. Actualmente el área de matemáticas está orientada por cinco docentes, dos de ellos con licenciatura en matemáticas, dos ingenieros mecánicos y una ingeniera industrial

Los sujetos de esta investigación son los estudiantes del grado undécimo C que aún no han abordado el contenido de la derivada dentro de su plan de área en matemáticas.

3.2.2. Ámbito de investigación

Este estudio se llevara a cabo en el Instituto Mistrató de este mismo municipio ubicado en el departamento de Risaralda. Para la realización se necesitan aproximadamente 6 horas de clase, lo cual requiere hacer adaptaciones a los demás contenidos programados por la institución y en el cual ya se le ha pedido el espacio a las directivas de la institución.

Este estudio se llevara a cabo con los estudiantes del grado 11 C, son 35 alumnos, de estratos socioeconómico bajo e hijos de personas que se dedican a las labores agrícolas y sus madres son amas de casa.

Es necesario anotar que los contenidos relacionados con el objeto aprendizaje, corresponden a este grado desde lo analítico y algebraico y así está diseñado en las mallas institucionales. En estas, se encuentran programadas para el tercer periodo del último grado de enseñanza media.

3.2.3. Población

La población en la cual se desarrolla el proyecto corresponde a estudiantes del grado undécimo grupo C de la institución educativa Instituto Mistrató. Estos son 35 estudiantes de los cuales 19 son hombres y 16 son mujeres sin estudiantes con NEE (Necesidades Educativas Especiales) y con un rango de edades entre los 15 y 18 años, con un conocimiento básico en el manejo del software Geogebra en la aplicación existente para los celulares. El objeto matemático a tratar está definido para el grado undécimo dentro de los estándares de calidad del MEN y los derechos básicos de aprendizaje (DBA)

3.3. TÉCNICA E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Dentro de la metodología de investigación propuesta en el proyecto que se presenta a consideración se hace necesario identificar el tipo de instrumentos a utilizar para este caso se escoge el análisis de contenido (Ñaupas, 2014), esta se define desde esta perspectiva como la técnica para la descripción objetiva, sistemática y cuantitativa del contenido manifiesto en la comunicación (Ñaupas, 2014). Su utilización requiere en especial el análisis de un contenido de un texto en una comunicación particular, develar diferencias entre el contenido y la comunicación además de medir la claridad de los mensajes tanto orales como escrito realizado durante las sesiones.

Además dentro de la comunicación existe una serie de preguntas tanto escritas como orales que se pueden dar durante la comunicación y se hace necesario también hacer el análisis de estas (Buendia, 1998). Estos elementos se desarrollan ciertos contenidos, en este sentido, serán centro de esta evaluación, los contenidos del docente y de los medios o recursos usados para el aprendizaje.

3.3.1. Conocimiento didáctico del contenido

El conocimiento didáctico del contenido es una perspectiva pedagógica que permite analizar la tarea de los sujetos que intervienen en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje (Pinto, 2008). En el marco teórico se evidencian diversos aspectos del docente de los estudiantes, e incluso de los medios que hacen parte del acto pedagógico dentro del aula, su objetivo es presentar una mirada didáctica y pedagógica donde se configura, el saber profesional (Pinto, 2008), el conocimiento tanto de la disciplina como los saberes pedagógicos que tiene el maestro, que están en los contenidos y los recursos que se pueden utilizar para ello. (Shulman, 1987) la denomina como conocimiento base para la enseñanza, al conocimiento profesional del profesor y la caracterizo cuando este refleja una noción didáctica, integra proposiciones teóricas y conocimientos técnicos y el conocimiento de la disciplina como fundamentos psicopedagógicos (Pinto, 2008). En el desarrollo de la noción de la didáctica, se incluyen tanto los recursos externos como internos (saber del maestro). En este conocimiento se deben tener en cuenta las representaciones (Godino, 2009). Una representación es una colección simbólica ya sea de carácter ostensivo o no ostensivo en el cual se ven reflejados los objetos matemáticos. Dentro de estas representaciones del conocimiento didáctico del profesor encontramos las representaciones de la disciplina, objeto matemático de estudio. En el caso del proyecto realizado corresponde a la derivada. Frente a las representaciones instruccionales (Pinto, 2008) se encuentran todas las instrucciones realizadas ya sean mediadas o directamente dadas por el docente. Este análisis es fundamental pues constituye el centro del aprendizaje y se reconoce los tipos de discursos que se establecen entre docentes y estudiantes. Las representaciones funcionales que tienen que ver con las funciones tanto de los medios, como aquellas que se dan desde su quehacer como centro de las prácticas. Por último, aparecen las representaciones internacionales que resultan de una

triada entre las relaciones que se pueden dar entre estudiantes-medios –docentes en un contexto en el cual propenden las prácticas pedagógicas.

Con respecto a la conocimiento de la didáctica específica (Pinto, 2008), se toman como referentes las representaciones de la enseñanza (RE), relacionadas con el discurso, los medios y las acciones antes, durante y después de las prácticas de aula. Las estrategias se combinan con otro elemento dentro de los componentes del CDE y son los materiales de apoyo o las mediaciones que se utilizan para cada uno de los aspectos de la enseñanza. Además las representaciones del contexto que guardan relación con aquellas que se pueden extraer del medio y llevarlas a la didáctica desde las necesidades configuradas en ella.

4. CAPITULO 4. ANÁLISIS DE DATOS

A continuación se analizan e interpretan el diseño y creación del texto escolar, la unidad didáctica, su aplicación y los resultados recolectados al aplicarla a los estudiantes del grado undécimo C de la Institución Educativa Instituto Mistrató.

Tabla 2: *Planeación del texto escolar*

No	Análisis	Interpretación
I1	Identificación del problema de enseñanza de la derivada en el grado 11 de la Institución Educativa Instituto Mistrató	Lo que significa que la docente posee un conocimiento de las deficiencias que posee al abordar el concepto de derivada y de los alumnos, del contexto, de sus necesidades, intereses, expectativas y de sus características. Según lo afirma (Shulman, 1987).
I2	Creación de un modelo pedagógico que relaciona el socio constructivismo con los aprendizajes colaborativo, autónomo y basado en problemas soportados con la teoría de aprendizaje de registros de representación semiótica para la enseñanza de la derivada en el grado undécimo	Esto significa que la docente tuvo en cuenta los aportes didácticos que ofrece el modelo en la enseñanza de la derivada, el conocimiento didáctico general, relacionado con la gestión de la clase, control de normas sociales, relaciones con los niños, estrategias de motivación y organización de la clase, que es una categorías de conocimiento de (Shulman, 1987) y la dimensión de fundación de (Rowland, 2013)
I3	Búsqueda de los contenidos sobre el Concepto de Derivada (tasa de variación, razón de cambio promedio, tasa de variación instantánea e interpretación geométrica de la derivada) y material para la creación del texto escolar	Esto significa que la docente analiza el currículo del concepto sobre la Derivada con base en los lineamientos curriculares del MEN y los DBA. Según (Shulman, 1987) y (Pinto, 2008), y la dimensión de fundación de (Rowland, 2013)
I4	Se analizó el contexto de la institución para tomar la decisión de enfocar el texto escolar transversalizado el concepto de derivada con las ciencias naturales ya que mayoría de los estudiantes provienen de la zona rural.	Esto significa que la docente realizo un análisis de la importancia de la derivada y del contexto de los estudiantes como lo categoriza (Shulman, 1987). Además tomando uno de los indicadores de William Mejía (1999) el cual argumenta que un texto debe tener un contenido suficiente, actualizado y con validez científica para el grado undécimo: datos precisos y actualizados, de acuerdo con el desarrollo de las ciencias naturales y las matemáticas del grado correspondiente.
I5	Para la creación del texto escolar se analizó que existen diversas representaciones de la	Esto significa que la docente tuvo en cuenta para el tema sobre derivada y sus formas de representación a

<p>Derivada que se pueden convertir o transformar en otros tipos de representación.</p>	<p>(Duval R. , 1993) quien afirma que es necesario tener más de una representación semiótica sobre los objetos matemáticos tratados, además la creación de nuevos sistemas semióticos en símbolos constituye la base para el progreso del conocimiento</p>
---	--

Tabla 3: *Creación del texto escolar*

No	Análisis	Interpretación
I6	En el diseño del texto escolar el cual incluye el concepto de Derivada se quiere hacer algo novedoso e interesante, que genere en los estudiantes un aprendizaje constructivo de los conceptos de variación, tasa de variación instantánea y representación geométrica de la Derivada	Lo que significa que la docente quiere realizar un tratamiento pedagógico de la Derivada donde se propicia la participación activa del alumno, evitando que se convierta en un espectador pasivo o en un repetidor de información; motiva al estudiante a aprender y a mantenerse interesado en las ciencias naturales mientras trabaja con el texto como lo afirma William Mejía (1999)
I7	La actividad “RECUERDA QUE” está diseñada para que los estudiantes por medio de un ejemplo de ciencias naturales, como lo es la intensidad de la corriente demuestren los conocimientos previos sobre límite de funciones y variación, la cual hace que se dividan en tres grandes grupos dependiendo de las respuestas obtenidas.	Lo que significa que la docente tiene en cuenta las relaciones de los conocimientos previos sobre variación y límites y las posibilidades de implementar actividades basadas en el ABP con el fin construir los nuevos aprendizajes que se proponen en el problema con los que ya disponen los alumnos. Según (Fernández, 2016) y (Shulman, 1987), (Duval R. , 2004)
I8	La actividad para el grupo uno de la página 3 del texto escolar, en el cual se afianzan los conceptos de límite de funciones fue diseñada para aquellos estudiantes que no muestran conocimientos previos de los temas que se trabajaran	Esto significa que la docente en el diseño de la actividad planeo un aprendizaje autónomo con utilización de recursos didácticos, potenciando el ABP en el cual el contexto y el entorno debe favorecer el trabajo autónomo de los estudiantes, en el estudio del límite de funciones y el trabajo en equipo que los alumnos llevarán a cabo (comunicación con docentes, acceso a fuentes de información, espacios suficientes, etc.) y la dimensión de transformación de (Rowland, 2013)
I9	La actividad diseñada para el grupo dos de la página 3 del texto escolar afianza los conocimientos que se tienen sobre el límite de funciones, sus propiedades y la aplicación de este en los problemas cotidianos.	Lo anterior significa que la docente tiene el conocimiento del currículo de matemáticas para el grado undécimo, organización de las temáticas sobre límite de funciones, secuenciación de los contenidos, utilización de los materiales y recursos, planeaciones, evaluación y seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje, que debe orientar el quehacer del docente en el aula (Shulman, 1987) y la dimensión de transformación de (Rowland, 2013)

I10	La actividad diseñada para el grupo tres en la página 4 del texto escolar construye el concepto de razón promedio de cambio a partir de situaciones cotidianas como lo son la velocidad de un automóvil o el cambio de temperatura del departamento en época de invierno.	Lo que significa que la docente en este diseño se encuentra basado en el ABP, el cual en una de sus características es favorecer la posibilidad de interrelacionar las ciencias con las matemáticas en el estudio de la derivada y la dimensión de transformación de (Rowland, 2013)
I11	El conocimiento conceptual sobre la Derivada se fue construyendo a partir de problemas cotidianos donde se guía al estudiante a determinar las definiciones de razón promedio de cambio, tasa de variación instantánea o derivada e interpretación geométrica de la derivada.	Esto significa que la docente para el diseño tuvo en cuenta el constructivismo social de (Vigotsky L. , 1978), el ABP en el cual el estudiante adquiere conocimientos sobre la derivada, habilidades y actitudes a través de diferentes situaciones y se pretende que éste construya su conocimiento sobre la base de problemas y situaciones de la vida real. y la dimensión de transformación de (Rowland, 2013)
I12	Para texto el eje temático, interpretación geométrica de la Derivada se construye con el programa Geogebra utilizando los computadores portátiles, guiando a los estudiantes paso a paso en la construcción grafica de funciones polinómicas para determinar la tangente de la función en un punto específico	Esto significa que la docente utiliza una de las características del Aprendizaje Colaborativo como lo son los recursos que deben estar al alcance de los estudiantes para lograr el objetivo de entender la derivada como la pendiente de la recta tangente y comprende el conocimiento, las competencias y destrezas que necesita para hacer un uso efectivo de las TIC en su materia específica como lo afirman Mishra y Koehler (2008) en el modelo TPACK y la dimensión de conexión de (Rowland, 2013)
I13	El Gimnasio matemático creado en el texto apunta a la ejercitación de los aprendizajes obtenidos sobre variación e interpretación geométrica de la derivada en el desarrollo de las actividades conceptuales	Lo que significa que la docente incluye en el texto actividades suficientes y variadas sobre el concepto de Derivada, para realizar dentro y fuera del aula, individualmente y en grupo; estimula procesos de análisis, creatividad y toma de posición razonada, como lo propone William Mejía (1999) en sus indicadores de calidad de los textos y la dimensión de transformación de (Rowland, 2013)
I14	Para el texto la evaluación sobre la derivada apoya las competencias que deben tener los estudiantes en el pensamiento variacional para las pruebas externas utilizando los diferentes registros de representación	Esto significa que la docente tuvo en cuenta para este diseño a (Duval R. , 1993) el cual defiende que no hay noesis (intelección) sin semiosis (producción de representaciones semióticas).
I15	La autoevaluación diseñada en el texto es el vehículo para que el docente analice las reflexiones de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas sobre razón promedio de cambio, tasa de variación instantánea o derivada e interpretación geométrica de la derivada.	Lo que significa que la docente en su diseño tiene presente las características de AC en la cual los estudiantes pueden realizar una autoevaluación donde realiza una reflexión sobre sus logros personales en el aprendizaje de la Derivada y su actitud ante el trabajo colaborativo y la dimensión de transformación de (Rowland, 2013)

Tabla 4: *Diseño de secuencia didáctica*

No	Análisis	Interpretación
I16	La secuencia didáctica de nombre “ <i>la derivada una razón de cambio</i> ” se diseñó para un tiempo de tres sesiones de dos horas cada una	Esto significa que la docente debe establecer un tiempo y especificarlo para que los alumnos resuelvan los problemas propuestos sobre la Derivada y puedan organizarse, como lo indica el ABP .
I17	Para el diseño se tuvo en cuenta los recursos tecnológicos que posee la Institución (video Beam y computadores portátiles) que puedan potenciar el aprendizaje del concepto de Derivada	Lo que significa que la docente analiza los recursos para el Aprendizaje Colaborativo donde las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) pueden provocar la transformación de los estudiantes de receptáculos pasivos de información a participantes más activos de su proceso de aprendizaje de la Derivada. Según (Buendía, 1998). Estos elementos se desarrollan ciertos contenidos, en este sentido, serán centro de esta evaluación, los contenidos del docente y de los medios o recursos usados para el aprendizaje.
I18	Se tuvo como meta lograr que los estudiantes de grado once del instituto Mistrató resuelvan problemas sobre razones de cambio y la derivada, aplicando sus principios, conceptos y reglas.	Esto significa que la docente posee el conocimiento del PEI de la institución el cual incluye en el pensamiento variacional, la derivada como tema del grado undécimo como lo afirma (Shulman, 1987), teniendo presentes los referentes nacionales específicamente los lineamientos curriculares y los DBA
I19	Los Objetivos planteados: comprender el concepto de derivada de una función como razón de cambio; determinar la tasa de variación instantánea en situaciones de la vida cotidiana; utilizar la derivada para determinar la recta tangente a una curva en un punto; apuntan el aprendizaje del pensamiento variacional.	Lo que significa que la docente se apoyó en Vygotsky quien plantea que los procesos de aprendizaje ocurren como procesos de asimilación de la cultura y el conocimiento de un grupo social al que pertenece el individuo, ocurren siempre de afuera hacia adentro, como un proceso de interiorización que permite la transformación de las funciones psicológicas y en general del pensamiento dicho por (Delgado, 2013)
I20	Se hace la conformación de equipos de trabajo de cuatro estudiantes en la cual se asignan roles a cada estudiante (Líder, Comunicador, Relator y Vigía de tiempo); los cuales deben realizar diferentes tareas en el desarrollo de las actividades sobre la derivada propuestas en el texto escolar.	Esto significa que la docente en el AC, basando el trabajo en pequeños grupos, donde los estudiantes con diferentes niveles de habilidad utilizan una variedad de actividades de aprendizaje de la derivada para mejorar su entendimiento sobre el tema, incentiva la negociación entre los integrantes del grupo
I21	El desarrollo de las sesiones en la secuencia se apoya en el texto diseñado ubicando las actividades sobre razón promedio de cambio, tasa de variación instantánea o derivada e interpretación geométrica de la derivada que deben desarrollar los estudiantes.	Esto significa que la docente en su texto con el tema de la derivada considera un conjunto de valores positivos, que contribuya a la formación del educando, como el trabajo en equipo y la solidaridad, según William Mejía (1999) y las dimensiones de fundación y transformación de (Rowland, 2013)

Tabla 5: Inicio --- ajustes primera sesión

No	ANALISIS	INTERPRETACION
I22	En la primera sesión les entregó a los estudiantes los textos escolares y se les solicitó que resolvieran el ejercicio de la página 2 en forma individual, con el fin de distribuir los grupos de acuerdo a las respuestas obtenidas, para esta actividad se dio un tiempo de 15 minutos. El objetivo de esta es tener claro los conceptos previos que tienen los estudiantes sobre el límite de funciones y sobre la variación. Esta actividad se realizó al total de estudiantes del grado.	Lo que significa que la docente desarrolló una actividad bajo las características del socio constructivismo de Vygotsky (1934), la cual hace referencia a los saberes previos del niño/a que le permiten realizar nuevas tareas o construir nuevos conocimientos. Lo que significa que la docente identificó los niveles de conocimiento de los estudiantes como lo afirma (Shulman, 1987)). Con respecto al conocimiento del estudiante.
I23	Al finalizar la actividad individual sobre el límite de funciones, los resultados obtenidos fueron que 5 estudiantes respondieron C, treinta estudiantes respondieron B y ninguno obtuvo la respuesta A. Se muestra en actividad RECUERDA QUE anexos 3 y 4	Lo que significa que la docente encontró que mayoría de los estudiantes tienen claro el concepto de límite de una función pero solo el 14% de los estudiantes entiende el concepto de variación, apoyada en la teoría socio-constructivista de Vygotsky (1934)

Tabla 6: Desarrollo --- ajustes primera sesión

No	ANALISIS	INTERPRETACION
I24	Al tener los resultados de la prueba de saberes previos sobre el límite de funciones se les indica a los estudiantes sobre la conformación de los grupos, en los cuales se deben nombrar los roles que deben realizar los estudiantes (Líder, Comunicador, Relator y Vigía de tiempo). Para los que contestaron B se les pide que realicen las actividades para el grupo 2 que se encuentra en la página 3 del texto escolar y para los que contestaron C deben realizar las actividades propuesta para el grupo 3 que se encuentran en las páginas 4 y 5 del texto Se muestra en actividad para grupo 1 anexo 5 y 6. Actividad para grupo 3 anexo 7 y 8	Lo que significa que la docente en la actividad de límite de variación de la carga eléctrica la desarrollo con una de las características del AC en la cual la interactividad entre las partes. Se aprende de la reflexión común, del intercambio de ideas, del analizar entre dos y más un tema común, a través de lo cual se obtiene un resultado enriquecido. Apoyada en el conocimiento de los alumnos (Shulman, 1987)
I25	Antes de desarrollar las actividades sobre razón promedio de cambio, tasa de variación instantánea o derivada e interpretación geométrica de la derivada por parte de los estudiantes, la docente manifiesta que, aunque deben trabajar colaborativamente para alcanzar los objetivos propuestos, así como de manera autónoma, estará atenta para guiarlos, apoyarlos, discutir inquietudes con los grupos	Lo que significa que se propicia una aprendizaje autónomo donde una de sus características es posibilitar una comunicación expresiva con el tutor o los compañeros; teniendo en cuenta también la negociación que es un elemento distintivo de las interacciones colaborativas, y tiene especial importancia cuando se trata de negociar significados para potenciar los aprendizajes sobre la derivada
I26	En el desarrollo de la actividad los estudiantes se encontraron un error en el diseño del texto ya	Lo que significa que la docente debe hacer una desviación de la agenda; respondiendo a las

	que en la actividad sobre variación de la temperatura se indicaba un día de la semana con fecha diferente a la imagen presentada.	ideas de los estudiantes como lo afirma (Rowland, 2013) en el cuarto componente contingencia, donde se le debió indicar a los estudiantes sobre desarrollar la actividad de variación en la temperatura sin tener en cuenta el día de la semana indicado.
	Se evidencia en el anexo 8	
I27	El conocimiento conceptual en la primera sesión, correspondió al límite de funciones, la variación y la razón promedio de cambio con el análisis de problemas de la vida cotidiana. Los conocimientos se propusieron por considerarse básicos en la enseñanza del cálculo en el grado 11 y como introducción a la educación superior.	Lo que significa que la docente en el diseño de la secuencia didáctica se basa en los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN, los DBA y la dimensión de conexión, como lo afirma (Rowland, 2013))

Tabla 7: Cierre --- ajustes primera sesión

No	Análisis	Interpretación
I28	Al finalizar la primera sesión la docente les pide a los estudiantes que formen una mesa redonda para hacer el análisis de la actividad. Se les pregunta sobre la concepción del texto diseñado sobre la Derivada a lo cual aportan que el texto es intuitivo y muy dinámico ya que se utilizan problemas de la vida cotidiana sobre razón promedio de cambio y tasa de variación instantánea especialmente tomando el área de ciencias naturales.	Lo que significa que los estudiantes tienen la apreciación del diseño del texto sobre nla derivada basados en uno de los indicadores del editor William Mejía (1999) el cual argumenta que los textos deben propiciar la participación activa del alumno, evitando que se convierta en un espectador pasivo o en un repetidor de información; motiva al estudiante a aprender sobre el pensamiento variacional y a mantenerse interesado mientras trabaja con el texto; utiliza un método consistente para enseñar; promueve la relación entre lo aprendible, el medio en que se ubica el estudiante y situaciones reales
I29	Al finalizar la sesión la docente se percata que la grabación no fue exitosa por lo cual no se tiene video de esta sesión pero se realizó la grabación de un audio que sirvió como insumo para hacer el análisis	Esto significa que la docente en la dimensión de contingencia de (Rowland, 2013) tuvo presente la situación que se podría presentar y respondió a la disponibilidad de recursos
	Se evidencia en el Audio 1	

Tabla 8: Inicio --- ajustes segunda sesión

No	ANALISIS	INTERPRETACION
I30	Al iniciar la segunda sesión la docente realiza una exposición utilizando el Video Beam sobre el tema variación promedio para afianzar los conocimientos adquiridos en el desarrollo de las actividades de la sesión anterior.	Lo que significa que la docente utiliza el material educativo del texto escolar en lo referente a variación y lo ajusta al contexto de los estudiantes. <i>como lo asegura</i> , (Duval R. , 2004). Utiliza la dimensión de fundación según (Rowland, 2013) y el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK) de (Mishra, 2006)
	Se evidencia en Video 1 minutos 0 a 3:10	
I31	Luego utilizando el Video Beam se hace la presentación de un video explicativo de la	Lo que significa que la docente utiliza recursos existentes en la WEB utilizando la dimensión de

diferencia entre variación y razón de cambio https://www.youtube.com/watch?v=rvfrhvUiHT8	fundación según (Rowland, 2013) y el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK) de (Mishra, 2006)
Se evidencia en Video 1 minutos 3:20 a 10:21	

Tabla 9: Desarrollo --- ajustes segunda sesión

	ANALISIS	INTERPRETACION
I32	La docente les indica a los estudiantes que nuevamente conformen los grupos de trabajo y que deben asignar nuevos roles (Líder, Comunicador, Relator y Vigía de tiempo) posteriormente les pide que realicen las actividades propuestas para el grupo 2 de las páginas 4 y 5 sobre el tema razón promedio de cambio y las actividades para el grupo 3 de la página 6 a la 10 sobre el tema tasa de variación instantánea	Lo que significa que la docente pretende que los estudiantes tomen roles diferentes apoyada en el conocimiento didáctico general como lo afirma (Shulman, 1987) y las dimensiones de fundación y conexión de (Rowland, 2013) para el desarrollo de las actividades propuestas en el texto sobre razón promedio de cambio y tasa de variación instantánea o derivada.
	Se evidencia en Video 1 minutos 11 a 12	
I33	Las actividades para el grupo 3, diseñadas a través de una situación de contaminación ambiental, convierte el lenguaje escrito al lenguaje algebraico y finalmente a la representación gráfica. Construyendo así el concepto de tasa de variación instantánea o derivada de una función	Esto significa que la docente en el desarrollo de la actividad se apoya en el conocimiento didáctico general como lo afirma (Shulman, 1987), en la dimensión de fundación de (Rowland, 2013) y en (Duval R. , 2004) con su característica de realizar el tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada
	Se evidencia en las actividades resueltas anexos de 9 a 11	
I34	En el desarrollo de las actividades la docente hace un acompañamiento a los grupos de trabajo para aclarar las dudas que se presenten en las diferentes actividades diseñadas de razón promedio e instantánea de cambio.	Esto significa que la docente tiene en cuenta para el desarrollo de las actividades sobre la derivada, las características del AC como es la negociación y las dimensiones de transformación y conexión según (Rowland, 2013)
	Se evidencia en Video 1 minutos 12 a 52:18	
I35	Al finalizar la sesión la docente realiza la exposición utilizando el Video Beam sobre la tasa de variación instantánea, la cual se calcula con el límite de la función cuando la variación es demasiado pequeña o tiende a cero.	Lo que significa que la docente utiliza el material educativo del texto escolar en lo referente a variación instantánea de cambio o derivada y lo ajusta al contexto de los estudiantes. Como lo asegura, (Duval R. , 2004). Utiliza la dimensión de fundación según (Rowland, 2013) y el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK) de (Mishra, 2006)
	Se evidencia en Video 1 minutos 52:30 a 53:48	

Tabla 10: Cierre --- ajustes segunda sesión

No	Análisis	Interpretación
I36	En la evaluación de la segunda sesión la docente pregunta a los estudiantes como les ha parecido el diseño de la guía de trabajo, a lo cual los estudiantes argumentan que las actividades sobre razón promedio de cambio y tasa de variación instantánea o derivada los van guiando paso a paso a obtener el concepto que se desea estudiar y que va aumentando el nivel de complejidad.	Esto significa que la docente ha generado con el diseño del texto sobre la derivada un interés en los estudiantes para valorarlo con un contenido suficiente, actualizado y con validez científica para el respectivo grado escolar, como lo afirma William Mejía (1999)

Tabla 11: Inicio --- ajustes Tercera sesión

No	ANALISIS	INTERPRETACION
I37	Al iniciar la tercera sesión la docente retoma la exposición utilizando el Video Beam de la sesión anterior y explica nuevamente los temas de razón promedio de cambio y tasa de variación instantánea o derivada. Se evidencia en Video 2 minutos 0 a 1:20	Esto que significa que la docente al explicar nuevamente la razón de cambio promedio e instantánea, utiliza las dimensiones de fundación y contingencia según (Rowland, 2013) y el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK) de (Mishra, 2006)
I38	La docente da las instrucciones a los estudiantes de continuar con las actividades hasta llegar todos a la página 10 del texto finalizando el eje temático de tasa de variación instantánea, debido a que en la sesión anterior no se cumplió con lo programado Se evidencia en Video 2 minutos 1:20 a 2:06	Lo que significa que la docente tiene la capacidad de dar respuestas coherentes, razonadas y bien informadas a eventos imprevistos sobre el desarrollo de las actividades de razón instantánea de cambio, como lo afirma (Rowland, 2013) en la dimensión de contingencia

Tabla 12: Desarrollo --- ajustes Tercera sesión

	ANALISIS	INTERPRETACION
I39	Los estudiantes se reúnen en grupos de trabajo y continúan con el desarrollo de las actividades propuestas en el texto. Para los del grupo 2 de las páginas 6 a 10 en las cuales se construye el concepto de tasa de variación instantánea y para los del grupo 3 las páginas 9 y 10 donde se ejercita sobre la tasa de variación instantánea Se evidencia en las actividades resueltas anexos de 9 a 13	Lo que significa que la docente ha generado en los estudiantes en el transcurso de las sesiones sobre la derivada, una actitud de trabajo autónomo, en equipo y colaborativo como lo confirman los aprendizajes AA, AC, ABP y el constructivismo social de Vygotsky (1934)
I40	En el desarrollo de las actividades de pensamiento variacional sobre la derivada, la docente hace un acompañamiento a los grupos de trabajo para aclarar las dudas que se presenten. Se evidencia en Video 2 minutos 2:25 a 58:30	Esto significa que la docente que la docente tiene en cuenta para el diseño de las actividades sobre la tasa de variación instantánea las características del AC como es la negociación y las dimensiones de transformación y conexión según (Rowland, 2013)

Tabla 13: *Cierre --- ajustes Tercera sesión*

No	Análisis	Interpretación
I41	Al finalizar la sesión la docente explica a los estudiantes que en la siguiente sesión se trabajara con el programa Geogebra el cual potencia los aprendizajes adquiridos hasta el momento	Esto significa que la docente en el diseño del texto tuvo en cuenta el Conocimiento Tecnológico del Contenido como lo afirman (Mishra, 2006) en el modelo TPACK
I42	Pregunta a los estudiantes sobre cómo les ha parecido el diseño del texto sobre la derivada, a lo cual argumentan que cada vez aumenta el nivel de complejidad y que se deben tener conocimientos de algebra que no les enseñaron en el grado octavo por diferentes situaciones de la Institución	Lo que significa que la docente tiene un conocimiento del contexto de los estudiantes y de la disciplina que enseña en los conceptos de pensamiento variacional como lo asegura (Shulman, 1987) y la dimensión de fundación de (Rowland, 2013)
Se evidencia en Video 2 minutos 59 a 60		

Tabla 14: *Inicio --- ajustes Cuarta sesión*

No	ANALISIS	INTERPRETACION
I43	Para iniciar la cuarta sesión la docente entrega computadores portátiles a los estudiantes para que trabajen en pequeños grupos de 2 o 3 personas con el programa geogebra.	Lo que significa que la docente en el diseño del texto sobre la interpretación geométrica de la derivada valoro los recursos existentes en la Institución como lo afirman (Mishra, 2006) en el modelo TPACK y conocimiento de los aspectos teleológicos de la institución educativa de (Shulman, 1987)
I44	Se explica a los estudiantes que deben realizar las actividades de las páginas 11 a 17 del texto escolar en la cual se construye a través del programa Geogebra la interpretación geométrica de la derivada	Esto significa que la docente diseño el texto sabe utilizar las TIC en la interpretación geométrica de la derivada como lo afirma (Mishra, 2006) en el modelo TPACK y el conocimiento del currículo en la utilización de los materiales y recursos según (Shulman, 1987)

Tabla 15: *Desarrollo --- ajustes Cuarta sesión*

	ANALISIS	INTERPRETACION
I45	Se realizaron las actividades propuestas sobre la interpretación geométrica de la derivada en el texto las cuales guían a los estudiantes paso a paso en el manejo del programa Geogebra Se evidencia en las actividades desarrolladas anexos 14 a 19	Esto significa que la docente diseñó las actividades sobre la derivada con las opciones pedagógicas y didácticas apoyadas en las TIC que estimulan y ofrecen condiciones para el aprendizaje exploratorio. Apoyados en el modelo TPACK de (Mishra, 2006) y el conocimiento general de (Shulman, 1987)) y un contenido suficiente, actualizado y con validez científica del texto como argumenta William Mejía (1999)
I46	La docente acompaña durante la sesión el proceso de aprendizaje explicándole a los estudiantes el manejo adecuado el programa	Lo que significa que la docente se apoya en el modelo TPACK de (Mishra, 2006), en (Shulman, 1987), en el aprendizaje colaborativo AC y en la

Geogebra en la interpretación geométrica de la derivada utilizando funciones polinómicas.	dimensión de Transformación de (Rowland, 2013) para el diseño de las actividades apoyadas en las TIC.
Se evidencia en el video 3	

Tabla 16: Cierre --- ajustes Cuarta sesión

No	Análisis	Interpretación
I47	Al final de la sesión se les pide a los estudiantes que apaguen los computadores portátiles y no se realiza evaluación de la sesión	Lo que significa que la docente ante las situaciones presentadas debe cambiar la agenda de trabajo programa como lo afirma (Rowland, 2013) en la dimensión de contingencia

Tabla 17: Valoraciones finales

No	Análisis	Interpretación
I48	La programación de tiempos adecuados para el desarrollo de las actividades no se cumplió a cabalidad con lo diseñado en la secuencia llamada “La Derivada Una Razón De Cambio” Se evidencia en los tiempos del audio 1 y los videos 1 2 y 3	Esto significa que la docente debe ajustar la secuencia didáctica sobre la derivada para un tiempo mayor atendiendo a los códigos contributivos de la dimensión e contingencia según (Rowland, 2013) y al ABP que en una de sus características argumenta que se debe establecer un tiempo y especificarlo para que los alumnos resuelvan el problema y puedan organizarse
I49	Interrupciones de la clase no programadas por personas de la institución pero ajenas a la clase, para resolver otro tipo de situaciones escolares no permite el normal desarrollo de la secuencia sobre la derivada	Esto significa que la docente atendiendo a los códigos contributivos de la dimensión de contingencia según (Rowland, 2013) debe desviar la agenda con base en el conocimiento teleológico de la Institución según (Shulman, 1987)
I50	El trabajo sobre la derivada se desarrolló en el aula de clase, por lo tanto se realizó el traslado de los computadores y otros elementos necesarios para las actividades, lo cual se llevaba un tiempo considerable.	Esto significa que la docente atendiendo a los códigos contributivos de la dimensión de contingencia según (Rowland, 2013) debe responder a la disponibilidad de herramientas y recursos
I51	Fallas inesperadas en los equipos portátiles, para ingresar a los equipos, falta de conexiones eléctricas o poco manejo del programa Geogebra entre otras.	Esto significa que la docente debe tener un buen conocimiento de TPACK para atender a las situaciones inesperadas como lo asegura (Mishra, 2006)
I52	Por falta de tiempo se realiza una nueva sesión de una hora y se les pide a los estudiantes que contesten las preguntas de la evaluación sobre los ejes temáticos de la Derivada trabajados y las de reflexión de las páginas 20 a 22 del texto ya que no se alcanzaron a realizar las actividades del gimnasio matemático Se evidencia en las actividades anexas 20 a 21	Esto significa que la docente atendiendo a los códigos contributivos de la dimensión de contingencia según (Rowland, 2013) en el cual se hace una desviación de la agenda y apoyada en el diseño del texto como lo afirma William Mejía (1999) debe priorizar las actividades sobre la derivada que se realizaran.
I53	Los estudiantes evidencian de manera positiva	Esto significa que la docente logro que en los

	que tuvieron un aprendizaje significativo en la construcción de los conceptos sobre razón promedio de cambio, tasa de variación instantánea o derivada e interpretación geométrica de la derivada.	estudiantes, la construcción de conocimientos sobre la derivada se produjo como el resultado del intercambio de significados entre los estudiantes que intervienen en el proceso de aprendizaje como lo afirma Vygotsky (1934) y se aplicaran las características del ABP
	Se evidencia en la actividad de reflexión del anexo 22	
I54	Se evidencia en los estudiantes que hubo construcción de significados compartidos sobre la derivada por medio de la interacción del trabajo grupal	Esto significa que la docente con sus actividades del texto en el pensamiento variacional específicamente la derivada, aporó al trabajo en grupo de los estudiantes atendiendo el AC donde intercambio de ideas, del analizar entre dos y más un tema común, a través de lo cual se obtiene un resultado enriquecido
	Se evidencia en la actividad de reflexión del anexo 22	

Tabla 18: *Clasificación de interpretaciones*

Tabla de clasificación de las interpretaciones		
OBJETIVO 1	OBJETIVO 2	OBJETIVO 3
Diseñar un modelo pedagógico para la enseñanza de la derivada en el aula de clase del grado undécimo de la institución educativa Instituto Mistrató.	Elaborar un texto escolar con apoyo de las TIC para el proceso de la enseñanza de la Derivada	Aplicar una unidad didáctica con uso del texto escolar con apoyo de las TIC en clase para valorar sus aportes didácticos desde los registros de representación semiótica.
I1, I2, I3, I4, I5, I7, I8, I10, I11, I12, I14, I15, I16, I17, I19, I22, I23, I25, I30, I33, I35, I39, I46, I48, I53	I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I13, I14, I16	I16, I17, I18, I19, I20, I21, I22, I23, I24, I25, I26, I27, I28, I29, I30, I31, I32, I33, I34, I35, I36, I37, I38, I39, I40, I41, I42, I43, I44, I45, I46, I47, I48, I49, I50, I51, I52, I53, I54

5. CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

5.1. PRIMERA CONCLUSIÓN

El crear un modelo pedagógico que relacione el constructivismo social de Vygotsky con las teorías de aprendizaje AA, AC, ABP permitieron al docente tener un referente frente a las didácticas, como el conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1987) y los registros de representación semiótica (Duval R. , 1993) que apoyan la enseñanza aprendizaje, consolidando la investigación didáctica de corte social y cognitiva favoreciendo el rediseño de la enseñanza desde una concepción matemática abordando los diferentes niveles de aprendizaje de los estudiantes y las diferentes maneras de representar el conocimiento didáctico la derivada para el grado undécimo.

5.2. SEGUNDA CONCLUSIÓN

El diseño del texto escolar sobre la Derivada generó en el docente un conflicto cognitivo, por que evidencia una visión Socio-Constructiva frente a la enseñanza de la derivada diferente a la enseñanza tradicional de ésta. En este sentido el reto lo constituyo la enseñanza de este objeto matemático a partir de la contextualización del mismo desde lo geométrico, lo variacional y lo numérico que permitieran explicar la razón de cambio a partir de teorías didácticas, uso de los medios de la información y la comunicación.

5.3. TERCERA CONCLUSIÓN

De acuerdo con el objetivo planteado para la ejecución del proyecto se puede señalar que la estrategia de la secuencia didáctica sobre la derivada en el grado undécimo del Instituto Mistrató, permitió planificar, desarrollar y evaluar de manera sistemática y lógica la unidad temática sobre la derivada diseñada en el texto escolar. Esta realmente brindó claridad no sólo a la docente en relación sobre la puntualización concreta de los conocimientos matemáticos y habilidades que los estudiantes debían adquirir, sino también visualizar los obstáculos cognitivos en el lenguaje del álgebra y algunos errores en el procedimiento. (Socas, 1994). Por otro lado, es importante señalar que la implementación de la secuencia didáctica permitió la participación del estudiantado y el docente cumplió un rol de mediador pedagógico, porque guió el proceso a partir de los conocimientos previos y experiencias de los y las estudiantes.

5.4. CUARTA CONCLUSIÓN

Desde la parte didáctica el proyecto de investigación relacionado con la construcción del texto escolar permite un desarrollo de la creatividad y la innovación que genere la creación de un texto asequible cognitivamente, un mayor conocimiento sobre el objeto matemático desde diferentes concepciones, las aplicaciones más relevantes que tiene la derivada y la introducción de conceptos previos Vygotsky (1934). En este sentido se favoreció un análisis inicial del grupo (caracterización), trabajo por equipos y el uso del contexto para potencializar las habilidades de los estudiantes por medio de la presentación de situaciones problema de su cotidianidad. Así los estudiantes por medio de la experiencia pueden potenciar su zona de desarrollo próximo. Desde la enseñanza de la derivada se tomaron actividades simples del medio que fueron expresados de

forma matemática, convirtiéndose en modelos que pueden servir de ejemplo para el caso de variación y llevados al aula para trabajarlos de forma grupal, permitiendo expresar la derivada desde diferentes representaciones y conversiones entre ellas.

6. CAPITULO 6. RECOMENDACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

- Como este proyecto es una investigación de tipo cualitativo desde un referente del análisis del contenido didáctico del profesor bajo el supuesto de que el aprendizaje de las matemáticas se verá mediada por referentes de tipo discursivo y analítico que hacen parte del análisis desde los presupuestos de (Shulman, 1987). Podría pensarse entonces, realizar un proyecto de investigación adicional a este con metodología cuantitativa con el fin de obtener resultados específicos de cada una de las secciones de la unidad de derivada diseñada para el libro de texto.
- Se recomienda para posibles estudios una investigación sobre la pertinencia del diseño del texto para cada una de las teorías de aprendizaje (aprendizaje Autónomo AA, aprendizaje Colaborativo AC y el aprendizaje basado en problemas ABP); relacionadas en el diseño del modelo pedagógico del proyecto.

BIBLIOGRAFÍA

- Aguilera, J. &. (2007). Percepcion de los Roles Docente - Estudiante: Problema que Influye en la Calidad de la Enseñanza. *Innovación Educativa Vol. 7*, 58.
- Barrera, A. (2010). *Análisis de Algunas Tareas en torno a la Noción de Tasa Media de Variación y Tasa Instantánea de Variación (Teisi de Magister)*. Pamplona, Colombia: Universidad de Pamplona.
- Benedicto, C. (2012). *ESTUDIO DE FUNCIONES CON GEOGEBRA*. Valencia, España: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Bruner, J. (1987). Prologue to the English edition. In L.S. Vigotsky. *Collected works*,, 1-16.
- Buendia, L. &. (1998). *Metos de Investigacion en Psicopedagogia*. Madrid, España: McGraw-Hill.
- Cerda, H. (2007). *La Investigacion Formativa en el Aula*. Bogota, Colombia: Magisterio.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, Significados, Representaciones Semioticas y Sentido. *Relime*, 177-196.
- Delgado, R. J. (2013). La enseñanza de la Matemática desde una óptica vigotskiana . 1-15.
- Dolores, C. (2000). Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De La Derivada. En C. Dolores, *El futuro del cálculo infinitesimal. Capítulo V* (págs. 155-181). Mexico D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1993). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En M. Callejo, *Avances y realidades de la educación matemática* (págs. 125-139). Barcelona España: Grao.
- Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives No. 5*, 37-65.
- Duval, R. (1999). *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Valle del Cauca, Colombia: GEM.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Cali, Colombia: Grupo de Educacion Matematica. Universidad del Valle 1999.
- Fernández, L. &. (2016). Aprendizaje basado en problemas: consideraciones para los graduados en medicina familiar y comunitaria en Ecuador. *MEDISAN*, 20 (9), 4000-4013.
- Gavilán, J. M. (2010). *El Papel Del Profesor En La Enseñanza De La Derivada. Análisis Desde Una Perspectiva Cognitiva (Tesis de Grado)*. Sevilla, España: Edición Digital @tres.
- Godino, J. (2003). Fundamentos de la Enseñanza y Aprendizaje para Maestros. *Proyecto Edumat- Maestros*, 37.
- Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educacion Matematica No. 20*, 13-31.
- Gonzales, P. &. (2008). El conocimiento didactico del Contenido en el Profesor de Matemáticas ¿Una Cuestión Ignorada? *Educacion Matematica Vol. 20*, 8.
- Lara , V., & Rosamary , S. (2005). El Aprendizaje Cooperativo: Un Modelo De Intervención Para Los Programas De Tutoría Escolar En El Nivel Superior. *Revista de la Educación Superior, vol. XXXIV (1)*, 87-104.
- Lizana, A. (2012). *Diseño de un Procedimiento de Captura y Representación del Conocimiento TPACK en la Enseñanza Universitaria*. Palma de Mallorca, España: Universidad de les Illes Balears.

- Lozano, Y. (2011). *Desarrollo del Concepto de Derivada sin la Noción de Limite*. Bogota, Colombia: Fundacion Universitaria Konfrad Lorenz.
- Mejia, M. (2016). *Matematicas I BGU*. Quito, Ecuador: Don Bosco.
- Mishra, P. y. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record Vol. 108*, 1017–1054.
- Moya, C. (2008). Aproximación al concepto y tratamiento de texto escolar. *Cuadernos de Lingüística Hispánica*, núm. 11, 133-152.
- Ñaupas, H. (2014). *Metodologia de La Investigacion Cualitativa-Cuantitativa y la Redaccion de Tesis*. Bogota, Colombia: Ediciones de la U.
- Orjuela, M. &. (2011). *Una Propuesta Para Posibilitar La Comprensión Del Concepto De La Derivada (Tesis de Grado)*. Bogota, Colombia: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.
- Oviedo, L. M., & Kanashiro, A. M. (2012). Los registros semióticos de representación en Matemática. *Revista Aula Universitaria 13*, 32.
- Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educacion Matematica Vol.26 No.2*, 111-132.
- Pineda, C. (2013). *Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto de la Derivada en el Último grado de Educación Secundaria (Tesis de Magister)*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Pinto, J. G. (2008). El Conocimiento Didáctico Del Contenido En El Profesor De Matemáticas: ¿Una Cuestión Ignorada? *Educacion Matematica, Vol.23, No. 3*, 83-100.
- Quesada, L. (2014). *Derivadas en la Vida Cotidiana (Tesis de Magister)*. Logroño, España: Univerisidad de La Rioja.
- Reigeluth, C. (2016). Teoria Instruccional y Tecnologia para el Nuevo Paradigma de la Educacion. *Revista de Educacin a Distancia Núm. 50*, 3-4.
- Rojas, O. (2012). *Interpretación de la Noción de Derivada como Razón de Cambio Instantánea en contextos Matemáticos (Tesis de Magister)*. Bogota, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Romero, F. (2009). Aprendizaje Significativo y Constructivismo. *Temas Para la Educacion No3. Revista Digital para profesionales de la Enseñanza*, 22.
- Rowland, T. (2013). The Knowledge Quartet: The Genesis and Application of a Framework for Analysing Mathematics Teaching and Deepening Teachers' Mathematics Knowledge. *SISYPHUS Journal of Education Vol. 1*, 15-43.
- Saidon, L. (6 de Abril de 2005). *Ayuda del GeoGebra 2.5*. Recuperado el 13 de Octubre de 2018, de Docplayer.es: http://docplayer.es/15596543-Ayuda-del-geogebra-2-5-markus-hohenwarter-www-geogebra-at-liliana-saidon-version-en-castellano.html#show_full_text
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review, 57 (1)*, 1-22.
- Socas, M. &. (1994). Algunos Obstaculos Cognitivos en el Aprendizaje de Lenguaje Algebraico . *Suma: Revista de Enseñanza y Aprendizaje de las Matematicas No. 16*, 91-98.
- Valbuena, S. &. (2015). *Matemática Escolar apoyada con Herramientas Computacionales*. Barranquilla, Colombia: Editorial Universitaria de la Costa EDUCOSTA.
- Velasquez, H. C. (2013). *Conocimiento Didactico-Matemático del Maestro que enseña Matemáticas (Tesis de Grado)*. Medellin, Colombia: Universidad de Antioquia.

- Vidal, O. (2012). *Interpretación de la noción de derivada como razón (Tesis de Grado)*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Vigotsky, L. (1989). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.
- Vigotsky, L. (1978). *Mind in Society The Development of Higher Psychological Processes*. London, England: Harvard University Press.
- Vigotsky, L. (1991). El Significado Historico de la Crisis de la Psicología. En L. Vigotsky, *Obras Escogidas I* (págs. 39-51). Madrid, España: Machado Libros S.A.
- Vila, J. (28 de Junio de 2013). *Los códigos QR aplicados a la educación*. Recuperado el 13 de Octubre de 2018, de Centro de Comunicacion y Pedagogia:
<http://www.centrocp.com/los-codigos-qr-aplicados-a-la-educacion/>
- Villegas, M. P. (1992). *Matematicas 2000*. Bogotá, Colombia: Editorial Voluntad.
- Vygotsky, L. (1979). El desarrollo de los procesos psicologicos superiores. Barcelona, España: Grijalbo.
- Yle, A., Juarez, J., & Vizcarra, F. (2012). *Calculo Diferencial para Bachillerato*. Mexico: Once Rios Editores.
- Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1994). Decreto 1860 de 1994 por el cual se reglamenta parcialmente la ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales. Obtenido de Ministerio de Educación Nacional:
<http://www.mineduacion.gov.co/1759/w3-article-86240.html>
 - Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1998). serie lineamientos curriculares. Obtenido de Ministerio de Educación Nacional en:
http://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf
 - MEN, M. D. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Recuperado de: http://www.Mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_.
 - http://e-ducativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/2000/2005/html/5_problemas_de_aplicacion_de_la_derivada.html

ANEXOS

CONTENIDO DE ANEXOS

- A.1. TEXTO ESCOLAR DISEÑADO SOBRE DERIVADA.**
- A.2. UNIDAD DIDACTICA LA DERIVADA UNA RAZON DE CAMBIO.**
- A.3. ACTIVIDAD DIAGNOSTICA GRUPO 3 PAG. 2 DEL TEXTO.**
- A.4. ACTIVIDAD DIAGNOSTICA GRUPO 2 PAG. 2 DEL TEXTO.**
- A.5. ACTIVIDAD DESARROLLADA POR ESTUDIANTES 2 DEL GRUPO DOS**
- A.6. ACTIVIDAD DESARROLLADA POR ESTUDIANTES 3 DEL GRUPO DOS**
- A.7. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 4 DEL TEXTO**
- A.8. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 5 DEL TEXTO**
- A.9. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 6 DEL TEXTO**
- A.10. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 7 DEL TEXTO**
- A.11. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 9 DEL TEXTO**
- A.12. DESARROLLADO ALGEBRAICO PAGINA 9 DEL TEXTO**
- A.13. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 10 DEL TEXTO**
- A.14. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 13 DEL TEXTO**
- A.15. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 14 DEL TEXTO**
- A.16. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 15 DEL TEXTO**
- A.17. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 15 DEL TEXTO**
- A.18. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 17 DEL TEXTO**
- A.19. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 20 DEL TEXTO**
- A.20. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 21 DEL TEXTO**
- A.21. DESARROLLO ALGEBRAICO PAGINA 21 DEL TEXTO**
- A.22. AUTOEVALUACION Y REFLEXION PAGINA 22 DEL TEXTO**

A.1. TEXTO ESCOLAR DISEÑADO SOBRE DERIVADA



UNIDAD XX

LA DERIVADA

EJES TEMÁTICOS

- *Variación y razones de cambio*
- *Definición de derivada*
- *Interpretación geométrica de la derivada*

DBA

Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Recuerda que:

El límite es un valor al cual se aproxima una función $f(x)$, dependiendo del valor al cual se acerque x .



Al calcular el límite de la carga eléctrica en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, se obtiene la corriente en un instante de tiempo dado.

I es la intensidad a la que pasa la carga a través de una superficie

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

La cantidad de carga eléctrica Q que pasa por una superficie plana en t segundos está dada por la expresión:

$$Q(t) = 2t^3 - t^2 + 3t + 4 \text{ culombios (C)}$$

Al calcular la intensidad de la corriente para un tiempo $t = 0,5s$, se obtiene el valor:

A

$I = 4 \text{ C}$

B

$I = 5,5 \text{ C}$

C

$I = 11 \text{ C}$

¿Y ESTO PARA QUE ME SIRVE?

Si quieres saber más consulta el siguiente enlace o escanea con tu celular el código QR

<https://www.youtube.com/watch?v=YqeZrFI9qFI>



- Si tu respuesta en la actividad anterior fue A, comienza por realizar las actividades propuestas para el grupo 1
- Si tu respuesta en la actividad anterior fue B, comienza por realizar las actividades propuestas para el grupo 2
- Si tu respuesta en la actividad anterior fue C, resuelve la actividad propuesta para el grupo 3.

ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 1

Busca la definición de los siguientes conceptos con la ayuda de un libro o conexión a internet:

1. ¿Qué es variación y como se calcula?
2. ¿Qué se entiende por función?
3. ¿Qué es el límite de una función?
4. ¿Cómo se determina el límite de una función cociente?
5. ¿Cómo se resuelve las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$?

Al finalizar continua con las actividades para el grupo 2

ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 2

La función $f(x) = x^2 - 3x + 5$ es una función polinomial y podemos calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ aplicando las propiedades de las operaciones con límites y del límite de la función identidad y de las funciones constantes

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$$

Con base en el ejercicio anterior determina los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 5} 2x^2 - 3x + 4$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{x^2-1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3}{x-1}$
5. El tejido vivo sólo puede ser excitado por una corriente eléctrica si ésta alcanza o excede un cierto valor que se designa con v . Este valor v depende de la duración t de la corriente. La ley de Weiss establece que $v = \frac{a}{t} + b$ donde a y b son constantes positivas. Analice el comportamiento de v cuando:

- a) t se aproxima a cero.
- b) t tiende a infinito.

1. Un automóvil se encuentra a 16 Km. de Mistrató cuando es la 1:00 P.M. A las 2:30 P.M. se encuentra a 87 Km. del mismo municipio. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de su distancia al municipio con respecto al tiempo, o su velocidad promedio del recorrido?

Solución: Sea " t " el tiempo en horas, y " $s(t)$ " la distancia al municipio en kilómetros, entonces:

$$\Delta t = 2,5 - 1 \quad y \quad \Delta s = 87 - 16$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{87 - 16}{2,5 - 1} = \frac{71}{1,5} = \frac{710}{15} = 47,33 \text{ km/h}$$

Donde el cociente o la razón promedio significa que por cada hora que paso el tiempo, el automóvil avanza en promedio 47,33 kilómetros

2. A las 10 horas hay 2000 bacterias en un frasco. A las 15 horas hay 12000 bacterias. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población de bacterias con respecto al tiempo?

Solución: Sea " t " el tiempo en horas, y " $p(t)$ " la población de bacterias en ese tiempo, entonces.

$$\Delta t = 15 - 10 \quad y \quad \Delta P = 12000 - 2000$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{10000}{5} = 2000$$

En este caso, el cociente o la razón promedio $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ significa que por cada hora que pasa, la población creció en promedio unas 2000 bacterias

AHORA RESUELVE

La temperatura de un lugar o región regularmente cambia o varía con el transcurso del tiempo, por lo que la consideramos, al igual que el tiempo, una magnitud física variable. Así, en la siguiente tabla se muestra el pronóstico de las variaciones de la temperatura máxima y mínima en el departamento de Risaralda durante siete días consecutivos del mes de noviembre de 2017.

DO. 26/11	LU. 27/11	MA. 28/11	MI. 29/11	JU. 30/11	VI. 01/12	SÁ. 02/12
						
23° /14°	22° /14°	23° /14°	23° /14°	25° /16°	25° /16°	25° /16°
Tormentas	Tormentas	Tormentas	Algún chubasco o tormenta	Algunos chubascos y tormentas	Chubascos y tormentas	Tormentas
<u>Media histórica</u> 28°/16°	<u>Media histórica</u> 28°/16°	<u>Media histórica</u> 28°/16°	<u>Media histórica</u> 28°/17°	<u>Media histórica</u> 28°/17°	<u>Media histórica</u> 28°/17°	<u>Media histórica</u> 28°/17°

FUENTE: <https://www.accuweather.com>

Con esta información, y considerando que el cambio o la variación de temperatura en un día de los mostrados en la tabla viene dada por la expresión $\Delta t = t_{max} - t_{min}$, y que, además, el pronóstico se cumplió, contesta las siguientes preguntas:

¿Qué día fue el más caluroso? _____

¿Qué días fueron los más fríos? _____

¿Qué día tuvo la mayor variación de temperatura? _____

¿Qué día tuvo la menor variación de temperatura? _____

¿Qué día tuvo el clima más agradable? _____

¿Cuál fue la temperatura exacta a las 12 horas del día miércoles 29 de noviembre? _____

Resumiendo

Se llama razón promedio de cambio de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ al cociente de la variación de las ordenadas de los puntos extremos del intervalo, entre la variación de sus abscisas, o sea es la razón del incremento de la y con respecto al incremento de la x . A esa razón la vamos a denominar δ .

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

RESOLVAMOS JUNTOS

Para combatir el "smog" y purificar la atmósfera de la Tierra, una compañía a través de sus fábricas y durante un período de 18 horas diarias, liberará en la atmósfera toneladas de una sustancia química determinada por la función:

$$f(x) = 0.2x^2 + 2x$$

¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancias químicas desde que se empiezan a liberar?

Hasta:

1. ¿2 horas después?
2. ¿5 horas después?
3. ¿Entre las 12 y las 14 horas?

Solución: aplicando lo aprendido de razón promedio de cambio

$$1. \quad \delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,8-0}{2-0} = \frac{4,8}{2} = 2,4 \text{ Ton}$$

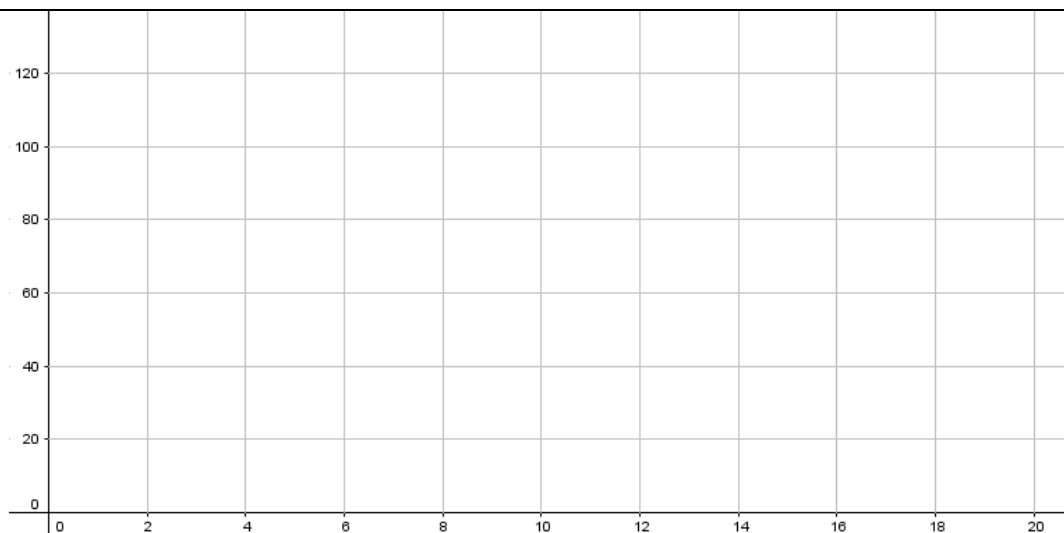
$$2. \quad \delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3,8 \text{ Ton}$$

$$3. \quad \delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 7,2 \text{ Ton}$$

Completa la tabla tomando intervalos de 2 horas

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$f(x)$	0	4,8					52,8	67,2		

Realiza un esbozo de la gráfica con los valores de la tabla:



¿Cuál es la liberación de cambio instantánea de toneladas de sustancia química exactamente 8 horas después?

Para determinar este valor tenemos que calcular la razón de cambio promedio para intervalos de tiempo cada vez más y más pequeños, estos intervalos deben iniciar en el "tiempo" que deseamos analizar, así para un tiempo de 8 horas se han liberado:

$$f(8) = 0.2(8)^2 + 2(8) = 28.8 \text{ Ton.}$$

Para un tiempo de 9 horas se han liberado:

$$f(9) = 0.2(9)^2 + 2(9) = 34.2 \text{ ton.}$$

Calcula la razón de cambio promedio para estos valores:

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad \text{Ton}$$

De igual manera calculemos las toneladas promedio de liberación de sustancias químicas que benefician la atmósfera para intervalos de tiempo más pequeños y que inicien en un tiempo = 8 hrs.

De 8 a 8.5hrs.

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{31,45 - 28,8}{8,5 - 8} = \frac{2,65}{0,5} = 5,3 \text{ Ton}$$

De 8 a 8.1hrs.

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad \text{Ton}$$

De 8 a 8.01hrs

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad \text{Ton}$$

Calculando para 8 y 8.001hrs.

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad \text{Ton}$$

Analizando el proceso de cálculo y los resultados que se van obteniendo y si tomáramos intervalos de tiempo "demasiado pequeños" concluimos que $\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende o está muy, pero muy "cerca" del valor 5.2 toneladas y podemos tomar este valor como la liberación de cambio instantánea, con lo cual contestamos la pregunta planteada.

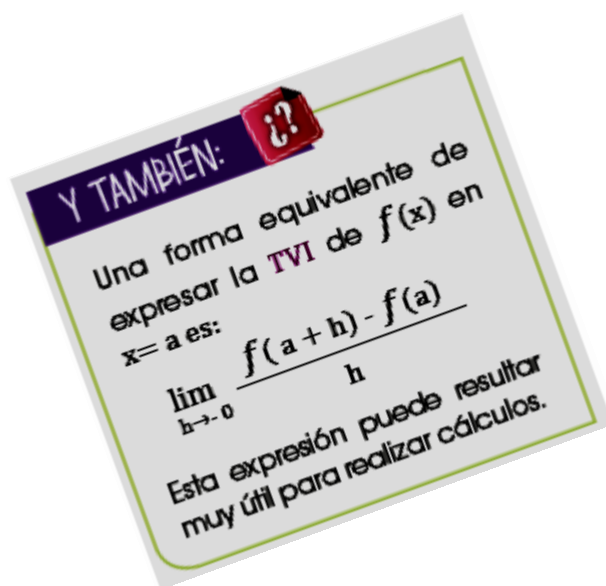
Resumiendo

La razón promedio de cambio, no deja de ser un promedio y, por lo tanto, interesa que los intervalos escogidos sean lo más pequeños posibles para conocer de forma precisa cómo se comporta la función cerca de cualquier punto. El límite en que los extremos de los intervalos de la razón promedio de cambio son infinitamente próximos se conoce como tasa de variación instantánea.

La tasa de variación instantánea (TVI) de una función $y = f(x)$ en un punto $x = a$, se llama derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$, y se representa por $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



EJEMPLO 1: Obtenga la derivada de la función
 $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ Aplicando la definición de derivada

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 4(x+h) - 5 - (3x^2 + 4x - 5)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 4x + 4h - 5 - 3x^2 - 4x + 5}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4x + 4h - 5 - 3x^2 - 4x + 5}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 + 4h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 4) \\
 &f'(x) = 6x + 4
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Reemplazando las x por el binomio $(x+h)$

Elevando el binomio $(x+h)$ al cuadrado y realizando los productos indicados

Simplificando

Realizando la división

Finalmente, calculando el límite cuando $h \rightarrow 0$ se obtiene la derivada de la función

Ejemplo 2: La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $x(t) = 6t^2$. Calcular:

- La velocidad media entre $t_1 = 1s$ y $t_2 = 4s$.
- La velocidad instantánea en $t = 1s$.

Solución:

La velocidad media de un cuerpo está dada por la expresión

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\text{a) } v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_m = \frac{6(4)^2 - 6(1)^2}{4 - 1} = \frac{96 - 6}{3} = \frac{90}{3}$$

$$v_m = 30 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } v_i = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(t+h)^2 - 6(t)^2}{h}$$

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(t^2 + 2th + h^2) - 6t^2}{h}$$

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6t^2 + 12th + 6h^2 - 6t^2}{h}$$

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12th + 6h^2}{h}$$

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12t + 6h)}{h}$$

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} 12t + 6h$$

$$v_i = 12t$$

$$v_i = 12(1) = 12 \text{ m/s}$$

Reemplazando los valores dados y resolviendo las operaciones indicadas se obtiene el valor de la velocidad media.

La velocidad instantánea de un cuerpo se determina con la expresión de derivada

$$v_i = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Resolviendo el cuadrado

Multiplicando por 6 para desaparecer el paréntesis

Simplificando términos semejantes

Factorizando factor común

Simplificando la h

Aplicando el límite

Reemplazando el valor del tiempo y calculando se obtiene el valor de la velocidad instantánea

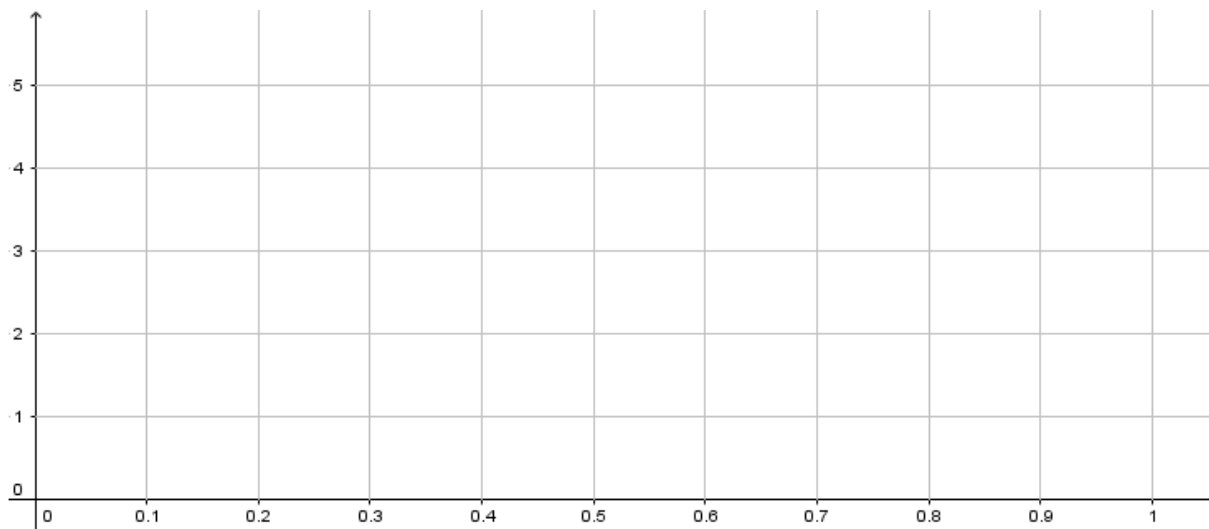
AHORA RESUELVE

Suponga que la posición de un carro de una montaña rusa está dada por la ecuación


$$s(t) = -3t^3 + 2t^2 + 5t$$

- a) ¿Cuál es la expresión para la velocidad instantánea del carro? _____
- b) ¿Qué velocidad tendrá el carro a los 2 segundos de haber partido? _____
- c) Tabule y grafique la función de la velocidad instantánea para los tiempos indicados

Tiempo	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Velocidad v_i											



- d) Use la gráfica para estimar (dar una aproximación) de la máxima velocidad y el momento en que toma esta velocidad

 <p><u>Gottfried Leibniz</u> (1646-1716).</p> <p><u>Isaac Newton</u> (1642-1727)</p>	<h3 style="color: red; text-align: center;">ALGO DE HISTORIA</h3> <p style="text-align: center;">¿Quién fue el precursor del cálculo diferencial?</p> <p>Entre los siglos XVII y XVIII, considerado el período de oro de la matemática, se lo debemos al denominado cálculo infinitesimal, inventado en forma casi simultánea por el físico-matemático inglés Isaac Newton (Inglaterra, 1643-1727) y el filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemania, 1646-1716).</p>
---	--

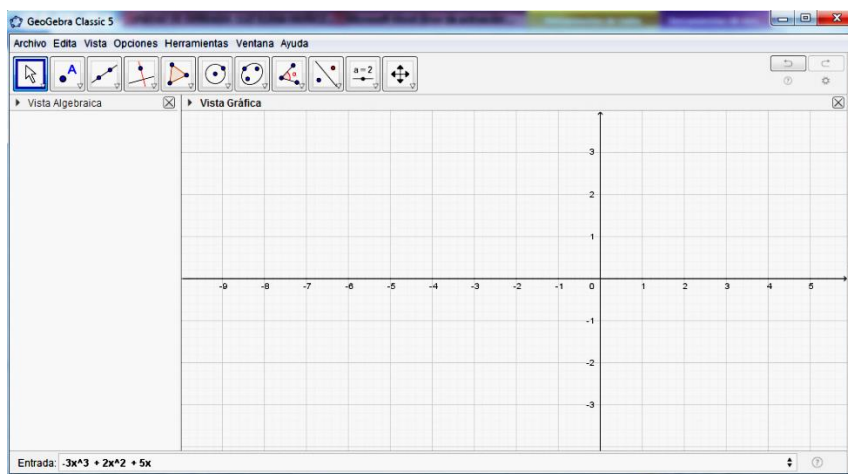
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

En grupos de tres estudiantes realicen la siguiente actividad, utilizando el computador y el programa **Geogebra**:

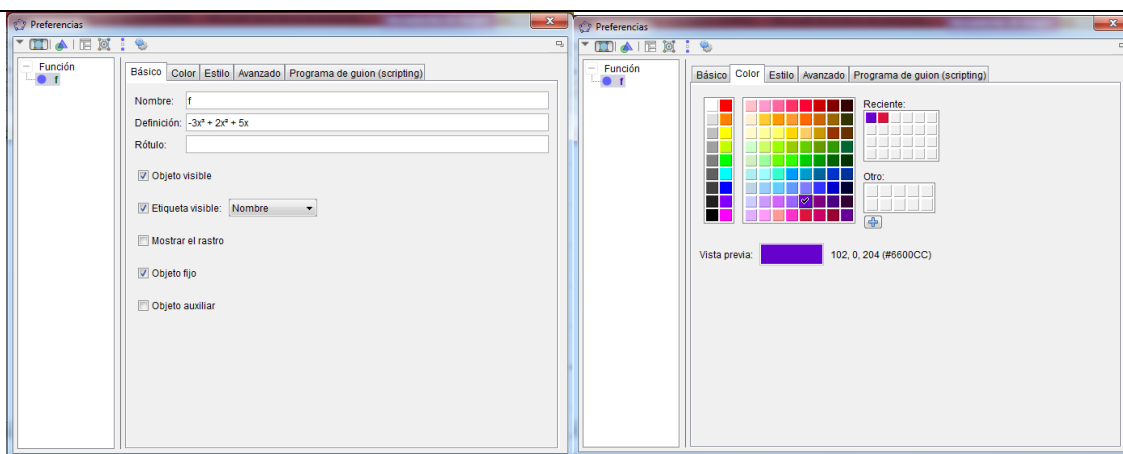
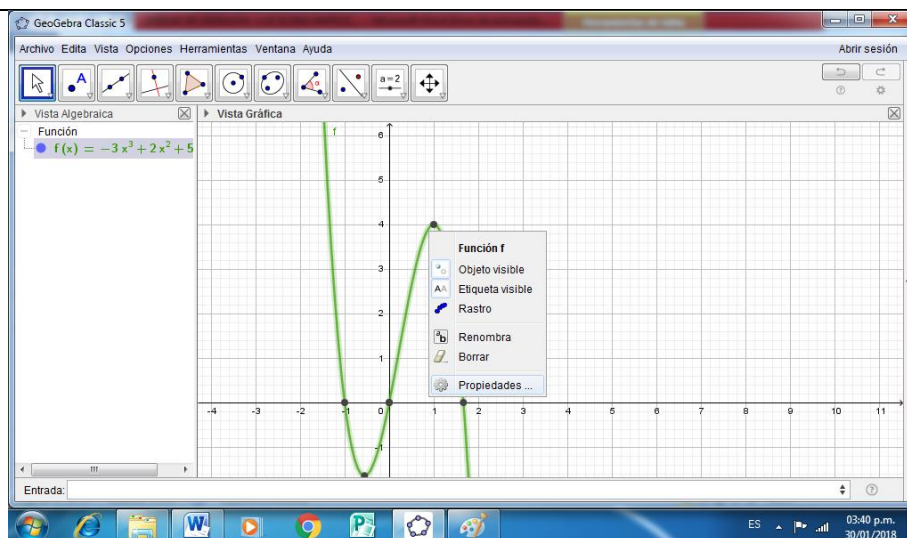
1. Abran el programa *GeoGebra*.
2. En el programa *GeoGebra*, escriban la fórmula de una función polinómica de tercer grado

$f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 5x$. De la siguiente manera:

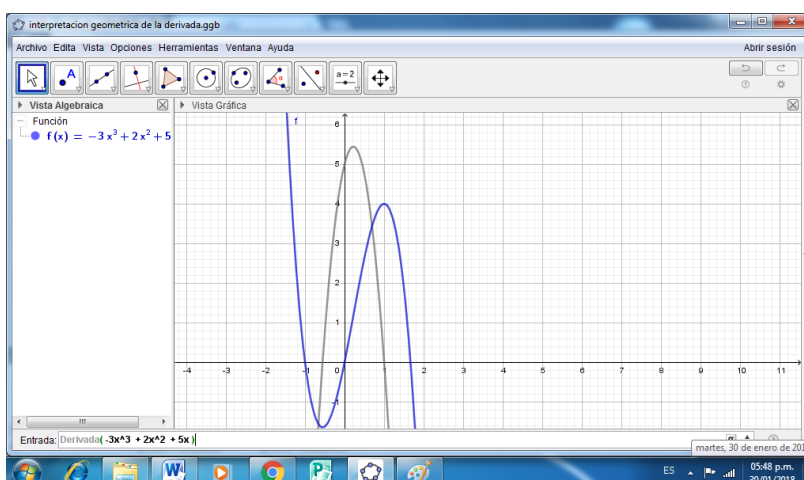
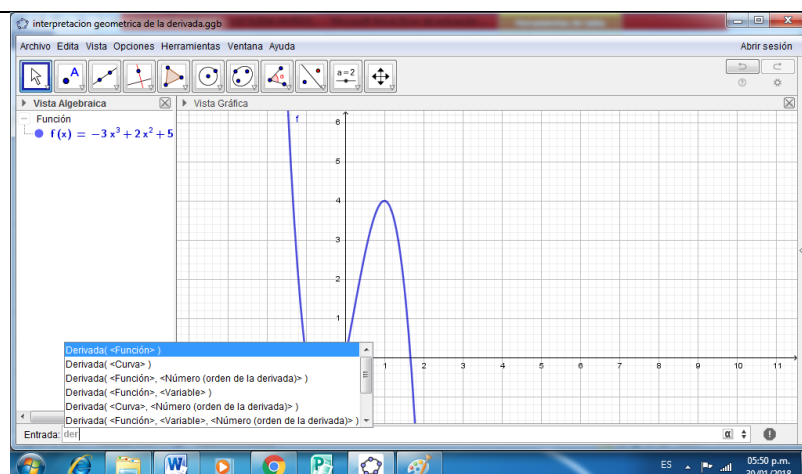
En entrada escriban $-3x^3 + 2x^2 + 5x$



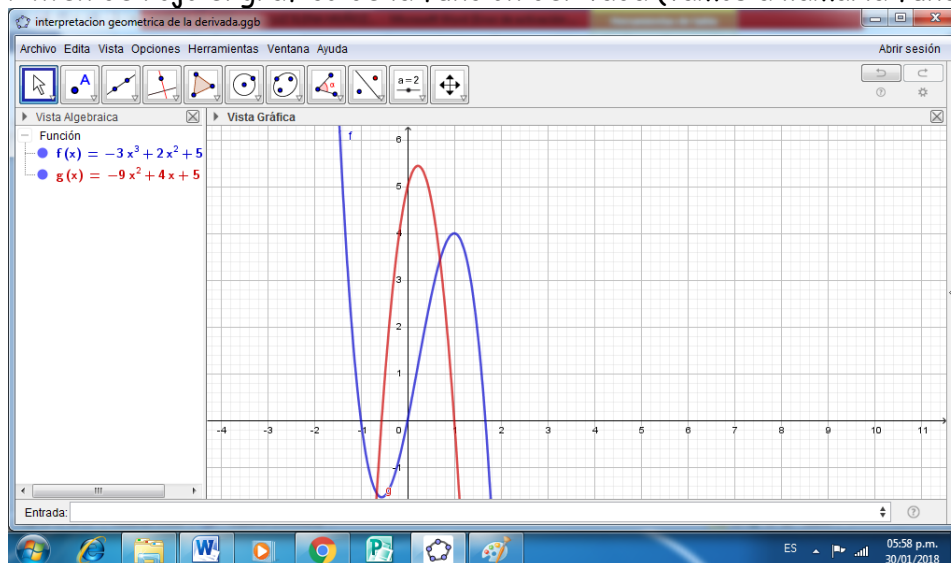
3. Pintan de azul el gráfico de esa función (vamos a llamarla función azul); con clic derecho sobre la gráfica y clic en propiedades, se despliegan la ventana de preferencias y se escoge la pestaña de color.



- Hagan que GeoGebra escriba la fórmula de la función derivada de la función azul; de la siguiente manera: En entrada escriban derivada y se les despliega la ventana que se muestra, luego escojan la derivada de la función y escriban la función que se desea derivar



5. Pinten de rojo el gráfico de la función derivada (vamos a llamarla función roja).

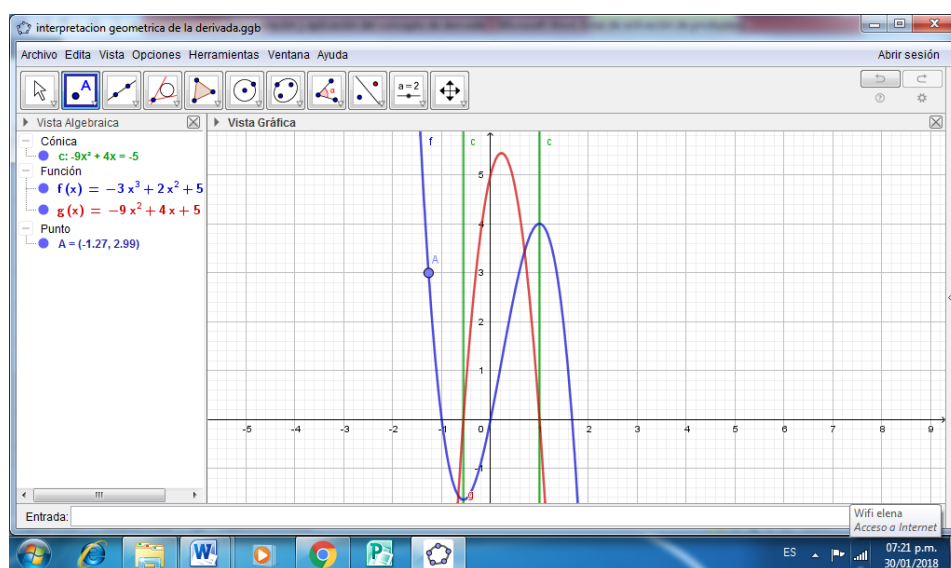


¿Qué forma tiene el gráfico de la función roja? ¿Por qué? _____

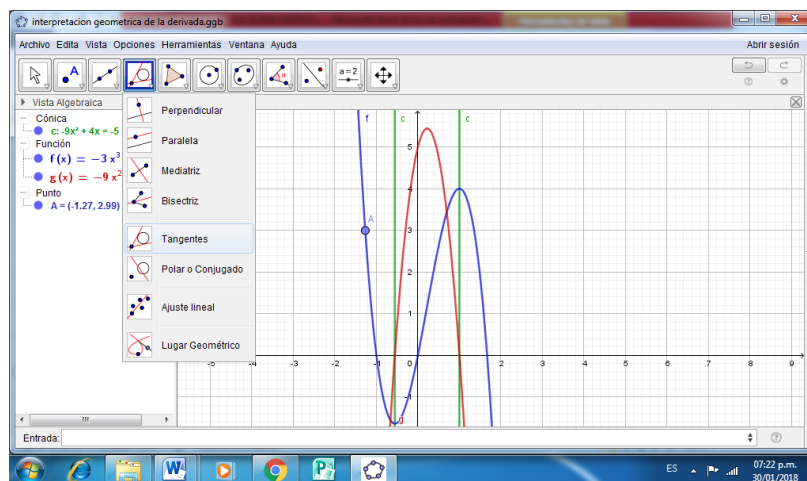
6. Copien la fórmula de la función roja en el Campo de Entrada, iguálénla a 0 y pulsen la tecla Enter. Se habrá generado así una ecuación c ; píntenla de verde.

7. Observen las rectas verdes que aparecieron: ¿qué muestran? _____

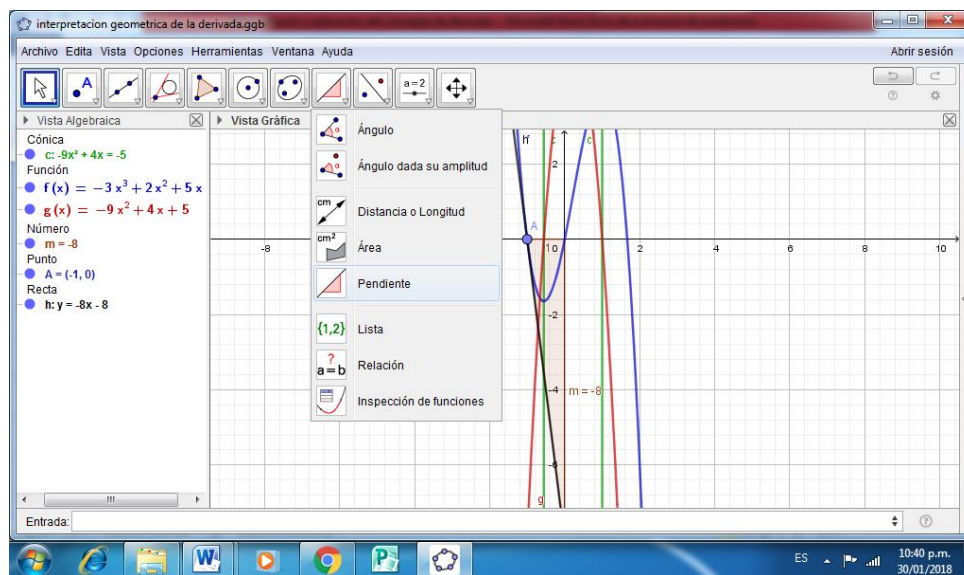
_____ Marq
uen un punto cualquiera que pertenezca al gráfico de la función azul.



8. Tracen por ese punto la recta tangente al gráfico de la función azul. Para ello, usen la herramienta que se muestra a continuación:



9. Muevan el punto recorriendo el gráfico y observen qué sucede con la recta tangente.
10. Hagan que GeoGebra muestre las pendientes de las rectas tangentes que aparecen. Para ello, usen la siguiente herramienta:



11. Vuelvan a mover el punto recorriendo el gráfico de la función y observen cómo varía el valor de la pendiente.

¿Qué sucede con el signo de la pendiente para valores del dominio que están entre las rectas verdes? ¿Y para los valores que están a la izquierda o a la derecha de ese intervalo? ¿Cómo pueden explicarlo?

¿Cuánto vale la pendiente cuando el valor del dominio coincide con la ecuación de cualquiera de las rectas verdes? ¿Por qué es así?

12. Modifiquen el valor del coeficiente principal en la fórmula de la función azul y generen así otra función (pueden probar incluso con un valor positivo para el coeficiente principal).
13. Hagan que el programa escriba la fórmula de la función derivada de esta última, y observen qué sucede con los gráficos. Repitan los últimos dos pasos.

¿A qué conclusión pueden llegar en cuanto a la variación del valor del coeficiente principal y a los gráficos que se generan? _____

Resumiendo

La tasa de variación media de una función f en $[a, a + h]$ es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos de abscisa a y $a + h$.

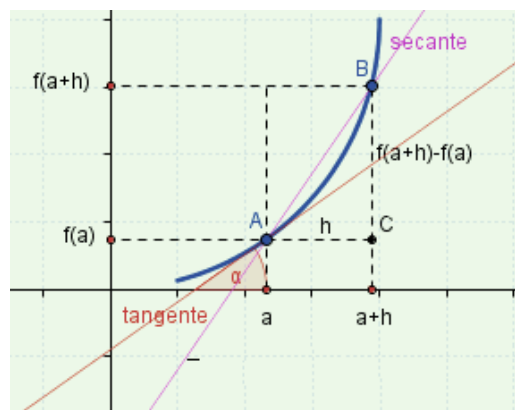
Si h tiende a cero, el punto $a + h$ tiende hacia el punto a y la recta secante pasa a ser la recta tangente a la curva. Por lo tanto:

La derivada de la función en el punto a es la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$

La ecuación de la recta tangente en dicho punto se puede expresar

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ecuación punto pendiente de la recta tangente a la gráfica de f , pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene como pendiente la derivada de f en a , $f'(a)$



Ejemplo 1:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 + 3$ en el punto $p(1, 4)$ y dibuja la recta tangente.

Solución: para calcular la ecuación de la recta tangente se utiliza la expresión:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Se determina primero la derivada de la función en el punto $a = 1$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((a+h)^2 + 3) - (a^2 + 3)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 3 - a^2 - 3}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h}$$

Aplicando el concepto de derivada

Resolviendo los cuadrados y eliminando paréntesis

Eliminando términos semejantes

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a + h)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h$$

$$f'(a) = 2a \quad f'(1) = 2(1) = 2$$

Como $f(1) = 1^2 + 3 = 4$

La ecuación de la recta tangente en el punto $p(1, 4)$ es:

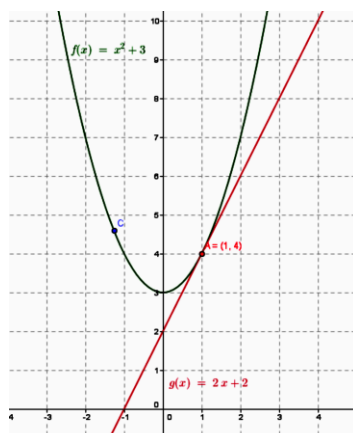
$$y - 4 = 2(x - 1)$$

$$y - 4 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 4$$

$$y = 2x + 2$$

La gráfica de la función y la recta tangente es:



Aplicando factor común h

Realizando la división

Aplicando el límite y reemplazando el valor de a

Reemplazando los valores obtenidos

Resolviendo las operaciones

AHORA RESUELVE

Dada la función $y = x^3 - 2$ determina la ecuación de la recta tangente en los puntos.

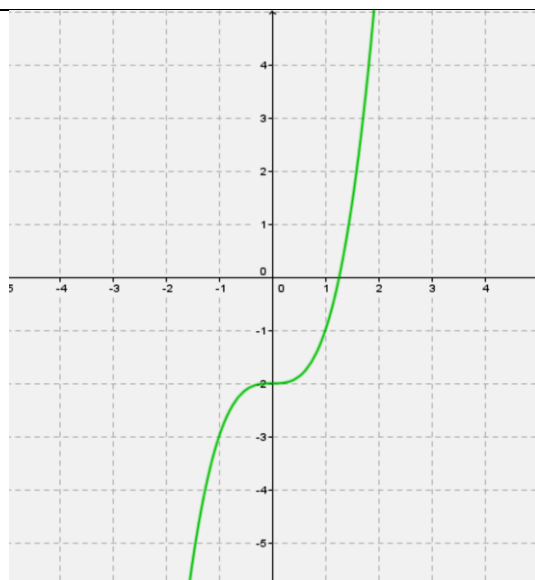
a. $A(1, -1)$

b. $B(0, 0)$

c. $C(-1, 3)$

1. ¿Qué relación encuentras entre las rectas halladas tangentes para los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 3)$?

2. ¿Qué diferencia o características encuentras en la recta tangente hallada para el punto $(0, 0)$?



GIMNASIO MATEMATICO

PRACTIQUEMOS SOLOS

Encuentra la derivada de las siguientes funciones a partir de las definiciones

1. $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$
2. $f(x) = -x^3$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x} - 1$

PRACTIQUEMOS EN

Reunete con tres compañeros y resuelvan las siguientes actividades

1. La siguiente tabla muestra el crecimiento de la población de parásitos, en cierta cantidad de alimentos contaminados, en un experimento controlado durante 10 horas continuas

Población de parásitos	20	25	32	34	45	60	85	88	90	91	90
Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Construyan la gráfica del experimento controlado y responde las siguientes preguntas

- a. Entre las 3 horas y las 7 horas ¿en cuánto vario la población de parásitos?

- b. En las 10 horas que duró el experimento. ¿En cuánto creció la población estudiada?
- c. ¿Entre qué horas fue mayor el crecimiento de la población?
- d. ¿En qué momento se produce un decrecimiento?
- e. Calcular la razón media de cambio entre las 3 horas y las 9 horas

2. Unos diseñadores informáticos han estado trabajando durante varios meses para poder acercar, a través de Internet, una visita a la **Capilla Sixtina**. El movimiento que se puede realizar en cada una de las direcciones dentro de la recreación virtual de la Capilla, lo han conseguido a través de una función plana que se aplica en la dirección en la que se mueve el ratón del ordenador, de forma que pueda seguir ofreciendo una perspectiva próxima a la realidad. La función utilizada es:

$$f(x) = 2x^2 + 6$$

De esta función han realizado las siguientes anotaciones en su estudio:

- a. La tasa de variación media entre los valores 1 y 3 es _____.
- b. La tasa de variación media entre los valores 4 y 8 es _____.
- c. La tasa de variación instantánea en el valor 3 es _____.
- d. La tasa de variación instantánea en el valor 5 es _____.

Ayúden a completar los valores.

3. Utilicen el programa Geogebra para encontrar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado. Graficar la función y su recta tangente.
- a. $f(x) = x^3 + 2$ en $(0,2)$
 - b. $f(x) = 5x^2 - x$ en $(1,4)$
 - c. $f(x) = -x^2 - 3$ en $(-1, -4)$

5. Un investigador está probando la acción de un fármaco sobre una bacteria. Ha averiguado que el número de bacterias, N , varía con el tiempo, t en horas, una vez suministrado el fármaco, según la función:

$$N(t) = 20t^3 - 510t^2 + 3600t + 2000$$

- a. ¿Cuántas bacterias había en el momento de suministrar el medicamento? ¿Y al cabo de 10 horas?
- b. En ese momento, ¿El número de bacterias está creciendo o disminuyendo?
- c. Representen gráficamente este proceso, utilizando el programa Geogebra y discutan las siguientes preguntas.
- d. ¿En qué momento la acción del fármaco es máxima?
- e. ¿En qué momento empieza a notarse el efecto del fármaco?
- f. ¿En qué momento empieza a perder su efecto el medicamento?

6. En la siguiente grafica, la linea roja representa el movimiento de un autobus que arranca de la parada y va, pococ a poco, ganando velocidad. (1) y (2) corresponden a pasajeros quye llegan

tarde y corren para tomar el autobus en marcha.

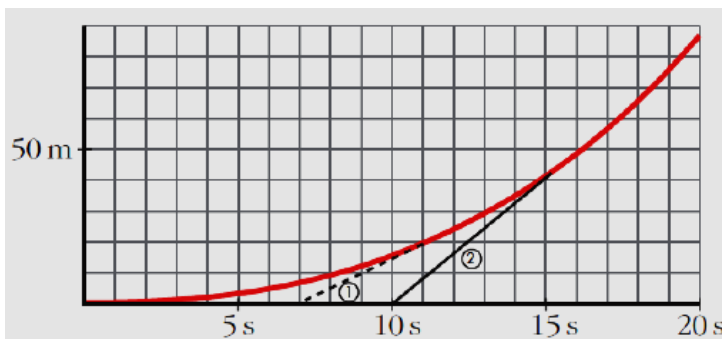
- Al viajero (2) lo acercan en bicicleta. Describan su movimiento y hallen la velocidad a la que corre.
- ¿Cuál es la velocidad aproximada del autobus en el momento que lo alcanza el pasajero (2)? ¿Entra este pasajero suavemente en el autobus?

7. Se dejó caer un objeto desde la terraza de un edificio de más de cien pisos, y se registraron los datos que muestra la tabla (están redondeados):

	Tiempo en el aire (s)	0	1	2	3	4
$F(x)$	Distancia recorrida (m)	0	5	20	45	80



- Abran el programa GeoGebra y carguen la tabla en la hoja de cálculo.
- Seleccionen los pares de valores y hagan que se cree una lista de puntos; de esa manera, quedarán marcados los 5 puntos en el sistema de ejes cartesianos (de ser necesario, ajusten la escala de cada eje para visualizar los 5 puntos).
- Determinen la fórmula de la función que contiene esos puntos y escríbanla en el campo de entrada, llamando x a la variable independiente. Pinten el gráfico de $f(x)$ con azul, y consideren solo $x \geq 0$.
- Hagan que el programa escriba la fórmula de la función derivada de $f(x)$. Pinten el gráfico de $g(x)$ con rojo.
- Respondan las siguientes preguntas:
 - ¿Qué representa la función $g(x)$ en la situación planteada?
 - ¿Cuánto vale la pendiente de la recta roja? ¿Qué significado tiene ese valor?



EVALUACIÓN

Marca la respuesta correcta a los siguientes

- la razón de cambio promedio de la función $f(x) = 3x + 1$ en el intervalo de valores de x (3,7)

- La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $v(t) = 6t^2$. la velocidad media entre los tiempos $t = 1$ y $t = 4$

- a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$
- b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$
- c. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$
- d. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 22$

Contesta las preguntas 2 y 3 con base a la siguiente información:

La siguiente gráfica muestra datos de exportación a Asia oriental.

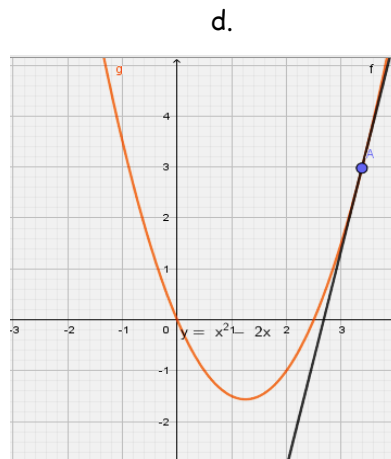
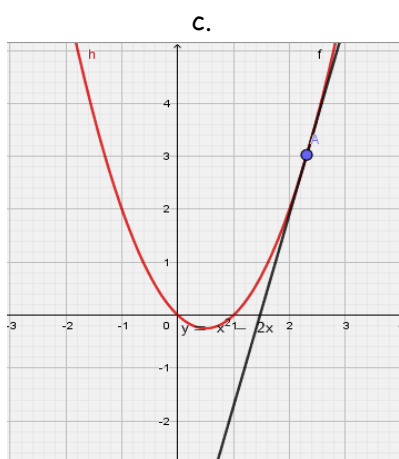
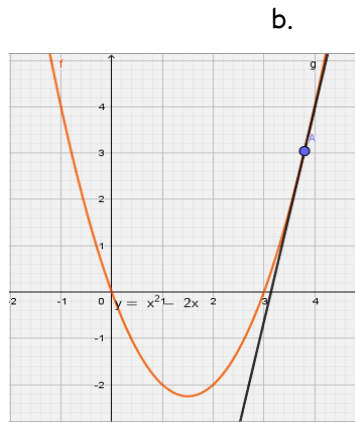
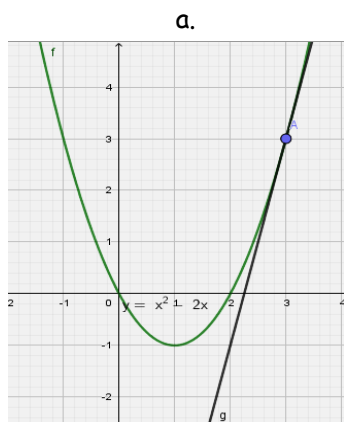


2. Durante el periodo 1993-1996, exportación a Asia oriental de costa oeste estaba aumentando a una razón promedio de:
 - a. 1,1 millones de contenedores por año
 - b. 0,3 millones de contenedores por año
 - c. 0,1 millones de contenedores por año
 - d. 1,2 millones de contenedores por año
3. Durante el periodo 1996-1998, exportación a Asia oriental de costa oeste estaba disminuyendo a una razón promedio de:
 - a. 0,1 millones de contenedores por año
 - b. 1,1 millones de contenedores por año
 - c. 0,1 millones de contenedores
 - d. 1,1 millones de contenedores

- a. 37m/s
- b. 32m/s
- c. 36m/s
- d. 30m/

5. Un cuerpo se mueve de acuerdo con la función $f(t) = 2t^2 + t - 1$ encuentre a velocidad promedio cuando varia de 4 a 6 segundos.
 - a. 20m/s
 - b. 32m/s
 - c. 21m/s
 - d. 27m/s
6. Una epidemia de cierta enfermedad, para la que no hay cura, azota una ciudad y los médicos estiman que el número de personas enfermas en un tiempo x , medido en días, está dado por la expresión: $f(x) = 2x^2 + x - 1$ La razón de cambio instantánea de la epidemia para cuando $x = 65$ días es:
 - a. 261 personas enfermas.
 - b. 258 personas enfermas.
 - c. 161 personas enfermas.
 - d. 981 personas enfermas.
7. La razón (tasa) de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama aceleración. Suponga que la velocidad de una partícula en el instante t está dada por $v(t) = 2t^2$. La aceleración instantánea cuando $t = 1$ segundos es:
 - a. 2 m/s^2
 - b. 4 m/s^2
 - c. $3,5 \text{ m/s}^2$
 - d. $4,5 \text{ m/s}^2$

8. La recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ esta dada por la función $y = 4x - 9$. La grafica que representa las dos funciones es:



9. La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 4x^3$ en el punto (1,4) es:

- a. $y = 2x - 8$
- b. $y = 2x - 9$
- c. $y = 12x + 8$
- d. $y = 12x - 8$

10. Aplicando la derivada de una función como el límite cuando h tiende a cero de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; donde h es la variación de x , se puede determinar que la derivada de la función $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$ es:

- a. No existe
- b. $4x - 2$

- c. $8x - 2$
- d. ∞

11. En un aeropuerto se lanza un globo meteorológico para pronosticar el clima, el cual asciende en forma vertical, después de x tiempo (en horas) alcanza una altitud medida en Km, esta altura está definida por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 4x$$

La velocidad instantánea después de $\frac{1}{2}$ hora de haber sido lanzado es:

- a. 2km/h
- b. 1.89km/h
- c. 2m/s
- d. 1.89m/s

Reflexiona y autoevalúate



Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?

¿He cumplido mis tareas?

¿Qué aprendí en esta unidad?

Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras?

¿He respetado las opiniones de los demás?

A.2. UNIDAD DIDACTICA LA DERIVADA UNA RAZON DE CAMBIO.

Secuencia didáctica (diseño tecnopedagógico)

Docente	Luz Elena Muñoz Vallejo
Nombre de la secuencia	La derivada una Razón de cambio
Tiempo	6 horas en tres sesiones de 2 horas

Tabla del modelo pedagógico

Enfoque Pedagógico		SOCIOCONSTRUCTIVISMO				
Teoría Aprendizaje		S1	S2	S3	S4	S5
APRENDIZAJE COLABORATIVO	AC1			5		
	AC2	5	5			
	AC3				5	
	AC4		5			
	AC5				5	5
APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS	ABP1	5				
	ABP2					5
	ABP3			5		
	ABP4		5			
	ABP5				5	
APRENDIZAJE AUTONOMO	AA1					
	AA2		5			
	AA3	5				
	AA4		5		5	
	AA5					5

SOCIO-CONSTRUCTIVISMO

- Características:

S1 Saberes previos del niño/a que le permiten realizar nuevas tareas o construir nuevos conocimientos

S2 Se requiere de un entorno social ya que es un proceso social.

S3 Selección de un andamiaje o mediación que facilite la construcción colaborativa de conocimientos

S4 Escuchar al niño/a y pedirle que represente, comunique o intercambie los significados que ha construido

S5 Propiciar conflictos cognitivos

APRENDIZAJE COLABORATIVO

- Características

AC1 Los recursos: Deben estar al alcance de los estudiantes para lograr los objetivos planteados, estos pueden ser tecnológicos: equipos de cómputo, software, internet; físicos: espacios adecuados como salones, laboratorios, biblioteca, etc.

AC2 La interactividad entre las partes. Se aprende de la reflexión común, del intercambio de

ideas, del analizar entre dos y más un tema común, a través de lo cual se obtiene un resultado enriquecido. La importancia de esta interacción está centrada en el grado de influencia que tiene la interacción en el proceso cognitivo y de aprendizaje del compañero.

AC3 La sincronía de la interacción. Esta sincronía es la que defienden algunos teóricos al referirse a la colaboración afirmando que es “una actividad coordinada y sincrónica, que surge como resultado de un intento continuo por construir y mantener una concepción compartida de un problema”

AC4 La negociación: La negociación es un elemento distintivo de las interacciones colaborativas, y tiene especial importancia cuando se trata de negociar significados. Sin negociación el diálogo se transforma en un monólogo, a la vez que la función del interlocutor se reduce a la de un simple receptor de mensaje.

AC5 La Evaluación: De parte del profesor se presenta una retroalimentación sobre conceptos y aplicaciones. Los estudiantes pueden realizar una auto-evaluación donde realiza una reflexión sobre sus logros y una coevaluación donde los estudiantes tienen la oportunidad de retroalimentar sobre sus méritos y aportes individuales con el fin de promover la cooperación al reconocer sus responsabilidades.

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

- Características

ABP1 Los conocimientos de los que ya disponen los alumnos deben ser suficientes y les ayudarán a construir los nuevos aprendizajes que se proponen en el problema.

ABP2 Surgen debates y preguntas que acabarán siendo usados como objetivos de aprendizaje

ABP3 Favorece la posibilidad de interrelacionar distintas materias o disciplinas académicas

ABP4 El contexto y el entorno debe favorecer el trabajo autónomo y en equipo que los alumnos llevarán a cabo (comunicación con docentes, acceso a fuentes de información, espacios suficientes, etc.)

ABP5 Establecer un tiempo y especificarlo para que los alumnos resuelvan el problema y puedan organizarse

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

AA1 Motivación, responsabilidad, autonomía, disposición hacia el aprendizaje

AA2 Se deben realizar aportes colaborativos

AA3 Se brinda la posibilidad de recrear conceptos previos y asimilarlos con los nuevos que va adquiriendo

AA4 Se debe posibilitar una comunicación expresiva con el tutor o los compañeros

AA5 Posibilita al educando organizar adecuadamente su tiempo

Registro de representación semiótica

Según Duval (1993) es necesario tener más de una representación semiótica sobre los objetos matemáticos tratados, además la creación de nuevos sistemas semióticos en símbolos constituye la base para el progreso del conocimiento. En el estudio de la derivada, existen diversas representaciones que se pueden convertir o transformar en otras y en las cuales juega un papel central como mediadores las ayudas tecnológicas que estamos proponiendo.

Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres

actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1) La presencia de una representación identificable.

2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.

3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...". Es decir con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones.

Inicio Primera sesión

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
	5 min	<ul style="list-style-type: none"> Meta: Lograr que los estudiantes de grado once del instituto Mistrató resuelvan problemas sobre razones de cambio y la derivada, aplicando sus principios, conceptos y reglas. 	
	20 min	<ul style="list-style-type: none"> Objetivos <ul style="list-style-type: none"> Comprender el concepto de derivada de una función como razón de cambio. Determinar la razón de cambio instantánea en situaciones de la vida cotidiana. Utilizar la derivada para determinar la recta tangente a una curva en un punto. Organización de equipos: Se pide a los estudiantes que resuelvan individualmente la actividad introductoria (Pág. 2 texto escolar), la cual divide la clase en tres grandes grupos dependiendo de las respuestas obtenidas; se pide que se reúnan en varios subgrupos 4 estudiantes. Con los subgrupos establecidos se les pide que cada integrante asuma un rol específico y que elaboren sus propias reglas <p>Líder: es la persona que coordina, guía, define políticas, invita a la reflexión del grupo para estructurar un excelente trabajo colaborativo.</p> <p>Comunicador: Encargado de establecer los niveles y flujos de comunicación entre el docente y los integrantes del grupo. También debe estar pendiente de comunicaciones de última hora del docente para dar pautas para el trabajo.</p>	
10			fotocopias

	min	<p>Relator: Responsable de todos los procesos escritos y recolección de información para entregar al docente.</p> <p>Vigía de tiempo: Es el encargado de manejar y coordinar los tiempos de entrega de las actividades propuestas. Además debe mantener informado al grupo sobre la administración del tiempo.</p> <ul style="list-style-type: none"> Se entrega el material y se dan las instrucciones pertinentes del trabajo que se ha de realizar 	
--	-----	--	--

Desarrollo Primera Sesión

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recursos
	50 min	<p>Se le pide a los subgrupos que realicen la actividad correspondiente para cada grupo con el fin de avanzar en los conocimientos y pasar al siguiente nivel:</p> <p>ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 1 Realizar la actividad propuesta en la Página 3 del texto escolar. Se le pide a los estudiantes que realicen estas actividades para reforzar los conocimientos previos sobre variación, función y límite de funciones</p> <p>ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 2 Realizar la actividad propuesta en la Página 3 del texto escolar. Para este grupo las actividades propuestas son para reforzar los conceptos de límite</p> <p>ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 3 Para este grupo se pide que realicen las actividades propuestas en las Páginas 4 y 5 del texto escolar, en las cuales se construye el concepto de razón promedio de cambio</p>	<p>Fotocopias</p> <p>Cuaderno de los estudiantes</p> <p>Textos de matemática grado 11</p> <p>Conexión a internet</p>

Final Primera sesión

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
	15 min	<p>Evaluar la actividad</p> <ul style="list-style-type: none"> Reflexión grupal: en mesa redonda se escucha las opiniones de los estudiantes con el fin de valorar los logros alcanzados en la actividad. Heteroevaluación se revisan los documentos obtenidos en el desarrollo de la actividad. 	

	20 min	<p>Cierre de la actividad</p> <p>El docente complementa los aprendizajes obtenidos por los estudiantes con la explicación de los conceptos de límite y variación, y su importancia en la resolución de problemas reales</p>	
--	--------	---	--

Inicio Segunda Sesión

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
	5 min	<ul style="list-style-type: none"> Meta: Lograr que los estudiantes de grado once del instituto Mistrató resuelvan problemas sobre razones de cambio y la derivada, aplicando sus principios, conceptos y reglas. 	
	10 min	<ul style="list-style-type: none"> Objetivos <ul style="list-style-type: none"> Comprender el concepto de derivada de una función como razón de cambio. Determinar la razón de cambio instantánea en situaciones de la vida cotidiana. Utilizar la derivada para determinar la recta tangente a una curva en un punto. Organización de equipos: Se pide a los estudiantes que se organicen en los grupos establecidos en la primera sesión pero que deben cambiar los roles. <p>Líder: es la persona que coordina, guía, define políticas, invita a la reflexión del grupo para estructurar un excelente trabajo colaborativo.</p> <p>Comunicador: Encargado de establecer los niveles y flujos de comunicación entre el docente y los integrantes del grupo. También debe estar pendiente de comunicaciones de última hora del docente para dar pautas para el trabajo.</p>	
	30 min	<p>Relator: Responsable de todos los procesos escritos y recolección de información para entregar al docente.</p> <p>Vigía de tiempo: Es el encargado de manejar y coordinar los</p>	fotocopias

		<p>tiempos de entrega de las actividades propuestas. Además debe mantener informado al grupo sobre la administración del tiempo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza la presentación de un video explicativo sobre el tema razón promedio de cambio • Se entrega el material y se dan las instrucciones pertinentes del trabajo que se ha de realizar 	
--	--	---	--

Desarrollo Segunda Sesión			
No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recursos
	50 min	<p>Para la segunda sesión se le pide a los subgrupos que realicen la actividad correspondiente para cada grupo con el fin de avanzar en los conocimientos y pasar al siguiente nivel:</p> <p>ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 1</p> <p>Realizar la actividad propuesta en la página 3 del texto escolar. Para este grupo las actividades propuestas son para reforzar los conceptos de límite adquiridos en la actividad realizada en la sesión anterior. se pide también que resuelvan la actividades de las Páginas 4 y 5 del texto escolar para la construcción del concepto de razón promedio de cambio</p> <p>ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 2</p> <p>Para este grupo se pide que realicen las actividades propuestas en las Páginas 4 y 5 del texto escolar, en las cuales se construye el concepto de razón promedio de cambio</p> <p>ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 3</p> <p>Para este grupo se pide que realicen las actividades propuestas en las Páginas 6 a 10 del texto escolar, en las cuales se construye el concepto de tasa de variación instantánea</p>	<p>Fotocopias</p> <p>Cuaderno de los estudiantes</p> <p>Conexión a internet</p>

Final Segunda Sesión			
No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
	10 min	<p>Evaluar la actividad</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reflexión grupal: en mesa redonda se escucha las 	

	15 min	<p>opiniones de los estudiantes con el fin de valorar los logros alcanzados en la actividad.</p> <ul style="list-style-type: none"> Heteroevaluación se revisan los documentos obtenidos en el desarrollo de la actividad. <p>Cierre de la actividad El docente complementa los aprendizajes obtenidos por los estudiantes con la explicación de los conceptos de razón instantánea de cambio</p>	
--	--------	--	--

Inicio Tercera Sesión

No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
	5 min	<ul style="list-style-type: none"> Meta: Lograr que los estudiantes de grado once del instituto Mistrató resuelvan problemas sobre razones de cambio y la derivada, aplicando sus principios, conceptos y reglas. 	
	10 min	<ul style="list-style-type: none"> Objetivos <ul style="list-style-type: none"> Comprender el concepto de derivada de una función como razón de cambio. Determinar la razón de cambio instantánea en situaciones de la vida cotidiana. Utilizar la derivada para determinar la recta tangente a una curva en un punto. Organización de equipos: Se pide a los estudiantes que se organicen en los grupos establecidos en la primera sesión pero que deben cambiar los roles. <p>Líder: es la persona que coordina, guía, define políticas, invita a la reflexión del grupo para estructurar un excelente trabajo colaborativo.</p> <p>Comunicador: Encargado de establecer los niveles y flujos de comunicación entre el docente y los integrantes del grupo.</p>	

	30 min	<p>También debe estar pendiente de comunicaciones de última hora del docente para dar pautas para el trabajo.</p> <p>Relator: Responsable de todos los procesos escritos y recolección de información para entregar al docente.</p> <p>Vigía de tiempo: Es el encargado de manejar y coordinar los tiempos de entrega de las actividades propuestas. Además debe mantener informado al grupo sobre la administración del tiempo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza exposición sobre el tema razón instantánea cambio • Se entrega el material y se dan las instrucciones pertinentes del trabajo que se ha de realizar 	fotocopias
--	--------	--	------------

Desarrollo Tercera Sesión


No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recursos
	50 min	<p>Para la tercera sesión se le pide a los subgrupos que realicen la actividad correspondiente para cada grupo con el fin de avanzar en los conocimientos y pasar al siguiente nivel:</p> <p style="text-align: center;">ACTIVIDAD PARA LOS GRUPOS 1 Y 2</p> <p>Para estos grupos se pide que realicen las actividades propuestas en las Páginas 6 y 9 del texto escolar, en las cuales se construye el concepto de tasa de variación instantánea y que realicen las actividades de construcción geométrica de la derivada de la página 11 a la página 17 del texto escolar utilizando los computadores portátiles y el programa geogebra</p> <p style="text-align: center;">ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 3</p> <p>Para este grupo se pide que realicen las actividades de construcción geométrica de la derivada de la Página 11 a la Página 17 del texto escolar utilizando los computadores portátiles y el programa Geogebra y que realicen las actividades propuestas en el gimnasio matemático Páginas 18 y 19 del texto escolar.</p>	<p>Fotocopias</p> <p>Cuaderno de los estudiantes</p> <p>Conexión a internet</p>

Final Tercera Sesión			
No	Hora	Actividad de aprendizaje	Recurso
	10 min	<p>Evaluar la actividad</p> <ul style="list-style-type: none"> Se le pide a los integrantes de cada grupo completen la ficha de coevaluación dando la valoración del cumplimiento de roles y reglas de sus compañeros con un puntaje numérico 	
	15 min	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión grupal: en mesa redonda se escucha las opiniones de los estudiantes con el fin de valorar los logros alcanzados en la actividad. Heteroevaluación se revisan los documentos obtenidos en el desarrollo de la actividad. <p>Cierre de la actividad</p> <p>El docente complementa los aprendizajes obtenidos por los estudiantes con la explicación de los conceptos de interpretación geométrica de la derivada para hallar la tangente de una curva en un punto dado</p>	

A.3. ACTIVIDAD DIAGNOSTICA GRUPO 3 PAG. 2 DEL TEXTO.

Recuerda que:

El límite es un valor al cual se aproxima una función $f(x)$, dependiendo del valor al cual se acerque x .



Al calcular el límite de la carga eléctrica en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, se obtiene la corriente en un instante de tiempo dado.

I es la intensidad a la que pasa la carga a través de una superficie

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

La cantidad de carga eléctrica Q que pasa por una superficie plana en t segundos está dada por la expresión:

$$Q(t) = 2t^3 - t^2 + 3t + 4 \text{ culombios (C)}$$

Al calcular la intensidad de la corriente para un tiempo $t = 0,5s$, se obtiene el valor:

$Q=5,5$ $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 11$

A	B	X	C
$I = 4C$	$I = 5,5C$		$I = 11C$

$$Q(0,5) = 2(0,5)^3 - (0,5)^2 + 3(0,5) + 4$$

$$= 0,25 - 0,25 + 1,5 + 4 = 5,5$$

A.4. ACTIVIDAD DIAGNOSTICA GRUPO 2 PAG. 2 DEL TEXTO.

Recuerda que:

El límite es un valor al cual se aproxima una función $f(x)$, dependiendo del valor al cual se acerque x .



Al calcular el límite de la carga eléctrica en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, se obtiene la corriente en un instante de tiempo dado.

I es la intensidad a la que pasa la carga a través de una superficie

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

La cantidad de carga eléctrica Q que pasa por una superficie plana en t segundos está dada por la expresión:

$$Q(t) = 2t^3 - t^2 + 3t + 4 \text{ culombios (C)}$$

Al calcular la intensidad de la corriente para un tiempo $t = 0,5s$, se obtiene el valor:

A

$$I = 4 \text{ C}$$

~~B~~

$$I = 5,5 \text{ C}$$

C

$$I = 11 \text{ C}$$

$$Q(0,5) = 2(0,5)^3 - (0,5)^2 + 3(0,5) + 4$$

$$Q(0,5) = 0,25 - 0,25 + 1,5 + 4 = 5,5 \text{ C}$$

A.5. ACTIVIDAD DESARROLLADA POR ESTUDIANTES 2 DEL GRUPO DOS

Desarrollo actividad #2

$$1 - \lim_{x \rightarrow 5} 2x^2 - 3x + 4 \rightarrow 2(5)^2 - 3(5) + 4 = 39$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{x^2-1} \rightarrow \frac{2+0}{0^2-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+2} \rightarrow \sqrt{1+2} \rightarrow \sqrt{3} = 1,73$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3}{x-1} \rightarrow \frac{(1)^4 - (1)^3}{(1)-1} = \frac{0}{0} = \cancel{\frac{0}{0}} \rightarrow \frac{x^4 - x^3}{x-1} \rightarrow \frac{x^3(x-1)}{x-1} \rightarrow x^3 \rightarrow 1^3 = 1$$

$$5 - v = \frac{a}{t} + b$$

$$v = \frac{1}{0,0099} + 2 = 103,000$$

a- Cuando se aproxima a cero tiende a dar valores más altos estando más cerca del ∞

b- Cuando t tiende a ser ∞ el resultado de v va a ser menor.

A.6. ACTIVIDAD DESARROLLADA POR ESTUDIANTES 3 DEL GRUPO DOS

Solución taller grupo 2

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} = 2x^2 - 3x + 4 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{2+x}{x^2-1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = 2(5)^2 - 3(5) + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = 50 - 15 + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = 39$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{2+0}{(0)^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{2}{-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} = \sqrt{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = \sqrt{1+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = 1,73$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} = \frac{x^4 - x^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(x-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = 1^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = 1$$

$$5. V = \frac{1}{t} + 2$$

$$V = \frac{1}{0,09} + 2 = 13,11$$

$$V = \frac{1}{0,08} + 2 = 14,5$$

$$V = \frac{1}{0,07} + 2 = 16,28$$

$$V = \frac{1}{0,06} + 2 = 14,66$$

$$V = \frac{1}{0,05} + 2 = 18$$

$$V = \frac{1}{1000000} + 2 = 2,0000001$$

$$V = \frac{1}{2000000} + 2 = 2,0000005$$

$$V = \frac{1}{5000000} + 2 = 2,0000002$$

A.7. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 4 DEL TEXTO

RESOLVAMOS JUNTOS ACTIVIDAD PARA EL GRUPO 3

1. Un automóvil se encuentra a 16 Km. de Mistratá cuando es la 1:00 P.M. A las 2:30 P.M. se encuentra a 87 Km. del mismo municipio. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de su distancia al municipio con respecto al tiempo, o su velocidad promedio del recorrido?

Solución: Sea "t" el tiempo en horas, y "s(t)" la distancia al municipio en kilómetros, entonces:

$$\Delta t = 2,5 - 1 \quad \text{y} \quad \Delta s = 87 - 16$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{87 - 16}{2,5 - 1} = \frac{71}{1,5} = 47,33 \text{ km/h}$$

Donde el cociente o la razón promedio significa que por cada hora que paso el tiempo, el automóvil avanza en promedio 47,33 kilómetros

2. A las 10 horas hay 2000 bacterias en un frasco. A las 15 horas hay 12000 bacterias. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población de bacterias con respecto al tiempo?

Solución: Sea "t" el tiempo en horas, y "p(t)" la población de bacterias en ese tiempo, entonces:

$$\Delta t = 15 - 10 \quad \text{y} \quad \Delta p = 12000 - 2000$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{10000}{5} = 2000$$

A.8. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 5 DEL TEXTO

DO. 26/11	LU. 27/11	MA. 28/11	MI. 29/11	JU. 30/11	VI. 01/12	SÁ. 02/12
23° / 14°	22° / 14°	23° / 14°	23° / 14°	25° / 16°	25° / 16°	25° / 16°
Tormentas	Tormentas	Tormentas	Algún chubascos o tormenta	Algunos chubascos y tormentas	Chubascos y tormentas	Tormentas
Media histórica: 28°/16°	Media histórica: 28°/16°	Media histórica: 28°/16°	Media histórica: 28°/17°	Media histórica: 28°/17°	Media histórica: 28°/17°	Media histórica: 28°/17°

FUENTE: <https://www.accuweather.com>

Con esta información, y considerando que el cambio o la variación de temperatura en un día de los mostrados en la tabla viene dada por la expresión $\Delta t = t_{\max} - t_{\min}$, y que, además, el pronóstico se cumplió, contesta las siguientes preguntas:

¿Qué día fue el más caluroso? El día sábado $\Delta t =$

¿Qué días fueron los más fríos? El lunes y el miércoles

¿Qué día tuvo la mayor variación de temperatura? El viernes

¿Qué día tuvo la menor variación de temperatura? El día lunes

¿Qué día tuvo el clima más agradable? El miércoles

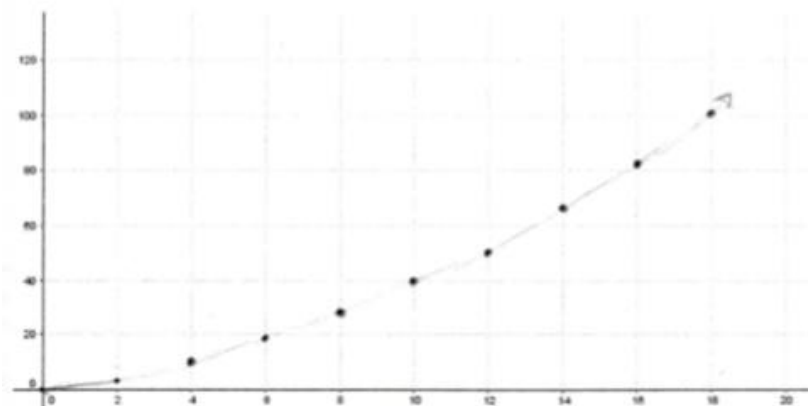
¿Cuál fue la temperatura exacta a las 12 horas del día ^{miércoles} viernes 29 de noviembre? 23°

A.9. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 6 DEL TEXTO

Completa la tabla tomando intervalos de 2 horas

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
f(x)	0	4,8	11,2	19,2	28,8	40	52,8	67,2	83,2	100,8

Realiza un esbozo de la gráfica con los valores de la tabla:



A.10. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 7 DEL TEXTO

Calcula la razón de cambio promedio para estos valores:

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{31,4 - 28,8}{9 - 8} = \frac{2,6}{1} = 2,6 \text{ Ton}$$

De igual manera calculemos las toneladas promedio de liberación de sustancias químicas que benefician la atmósfera para intervalos de tiempo más pequeños y que inicien en un tiempo = 8 hrs.

De 8 a 8.5hrs.

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{31,45 - 28,8}{8,5 - 8} = \frac{2,65}{0,5} = 5,3 \text{ Ton}$$

De 8 a 8.1hrs.

$$f(8,1) = 0,1(8,1)^2 + 2(8,1) = 19,31$$

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{19,31 - 18,8}{8,1 - 8} = \frac{0,51}{0,1} = 5,1 \text{ Ton}$$

De 8 a 8.01hrs

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18,85 - 18,8}{8,01 - 8} = \frac{0,05}{0,01} = 5 \text{ Ton}$$

Calculando para 8 y 8.001hrs.

$$\delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18,805 - 18,8}{8,001 - 8} = \frac{0,005}{0,001} = 5 \text{ Ton}$$

A.11. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 9 DEL TEXTO

AHORA RESUELVE

$$V_i = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Suponga que la posición de un carro de una montaña rusa está dada por la ecuación

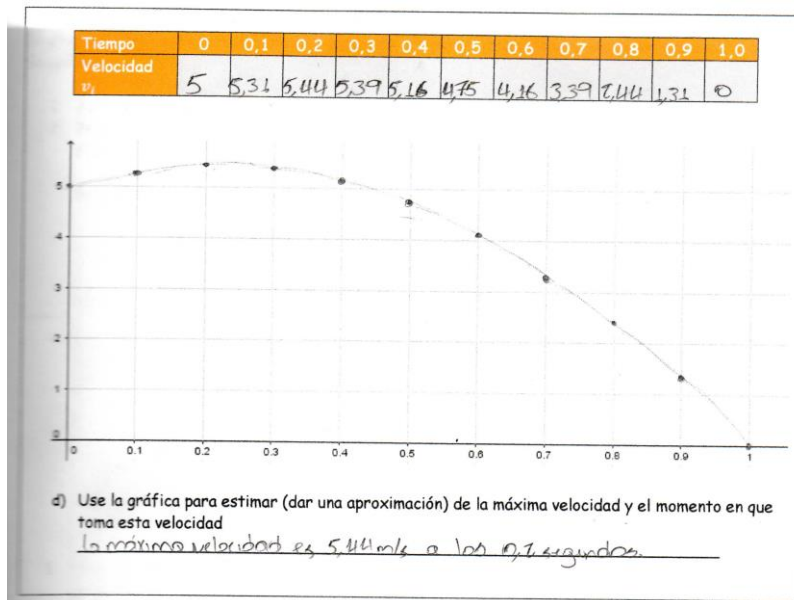
$$s(t) = -3t^3 + 2t^2 + 5t$$

- ¿Cuál es la expresión para la velocidad instantánea del carro? $9t^2 + 4t + 5$
- ¿Qué velocidad tendrá el carro a los 2 segundos de haber partido? -13 m/s
- Tabule y grafique la función de la velocidad instantánea para los tiempos indicados

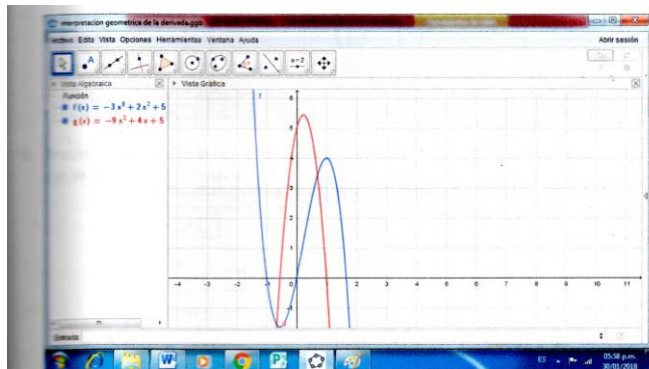
A.12. DESARROLLO ALGEBRAICO PAGINA 9 DEL TEXTO

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 4(t)^3 \\
 v_i &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(t+h)^3 + 2(t+h)^2 + 5(t+h) - (-3t^3 + 2t^2 + 5t)}{h} \\
 v_i &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3) + 2(t^2 + 2th + h^2) + 5t + 5h - (-3t^3 + 2t^2 + 5t)}{h} \\
 &= \frac{-3t^3 - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3 + 2t^2 + 4th + 2h^2 + 5t + 5h - (-3t^3 + 2t^2 + 5t)}{h} \\
 v_i &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3t^3 - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3 + 2t^2 + 4th + 2h^2 + 5t + 5h + 3t^3 - 2t^2 - 5t}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9t^2h - 9th^2 - 3h^3 + 4th + 2h^2 + 5h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-9t^2 - 9th - 3h^2 + 4t + 2h + 5) \\
 &= -9t^2 - 9th - 3h^2 + 4t + 2h + 5 \\
 &= -9t^2 + 4t + 5
 \end{aligned}$$

A.13. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 10 DEL TEXTO



A.14. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 13 DEL TEXTO



¿Qué forma tiene el gráfico de la función roja? ¿Por qué? Parabola porque el exponente se redujo

A.15. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 14 DEL TEXTO

7. Observen las rectas verdes que aparecieron: ¿qué muestran? muestra el punto en el que la derivada interseca el eje X y además pasa por los picos y valles de la función original

A.16. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 15 DEL TEXTO

12. Vuelvan a mover el punto recorriendo el gráfico de la función y observen cómo varía el valor de la pendiente.

¿Qué sucede con el signo de la pendiente para valores del dominio que están entre las rectas verdes? ¿Y para los valores que están a la izquierda o a la derecha de ese intervalo? ¿Cómo pueden explicarlo? Los valores son positivos cuando está entre las rectas verdes y negativo fuera de ellas

¿Cuánto vale la pendiente cuando el valor del dominio coincide con la ecuación de cualquiera de las rectas verdes? ¿Por qué es así? 0 (cero) porque la tangencial es paralela al eje y, y perpendicular al eje x

A.17. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 15 DEL TEXTO

14. Hagan que el programa escriba la fórmula de la función derivada de esta última, y observen qué sucede con los gráficos.

Repitan los últimos dos pasos.

¿A qué conclusión pueden llegar en cuanto a la variación del valor del coeficiente principal y a los gráficos que se generan? Así se cambie el coeficiente principal las tangentes no cambian

A.18. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 17 DEL TEXTO

AHORA RESUELVE

Dada la función $y = x^3 - 2$ determina la ecuación de la recta tangente en los puntos.

a. $A(1, -1)$

b. $B(0, 0)$

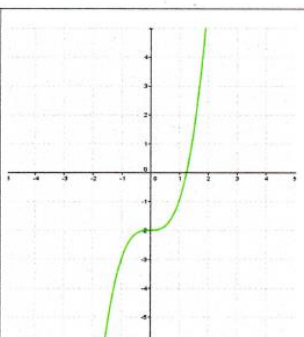
c. $C(-1, 3)$

1. ¿Qué relación encuentras entre las rectas halladas tangentes para los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 3)$?

Que son paralelas

2. ¿Qué diferencia o características encuentras en la recta tangente hallada para el punto $(0, 0)$?

son paralelas así el punto está fuera de la función



A.19. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 20 DEL TEXTO

EVALUACIÓN

Marca la respuesta correcta a los siguientes

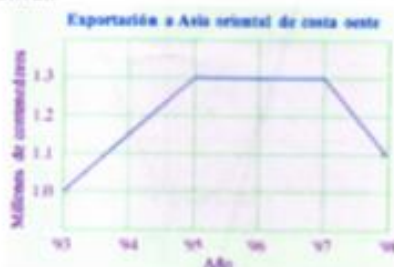
1. la razón de cambio promedio de la función

$$f(x) = 3x + 1 \text{ en el intervalo de valores de } x (3, 7)$$

- a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$ $3(3)+1=10$
~~b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$~~ $3(7)+1=22$
 c. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$
 d. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 22$

Contesta las preguntas 2 y 3 con base a la siguiente información:

La siguiente gráfica muestra datos de exportación a Asia oriental.



2. Durante el periodo 1993-1996, exportación a Asia oriental de costa oeste estaba aumentando a una razón promedio de:

- ~~a. 1,1 millones de contenedores por año~~
 b. 0,3 millones de contenedores por año
 c. 0,1 millones de contenedores por año
 d. 1,2 millones de contenedores por año

3. Durante el periodo 1996-1998, exportación a Asia oriental de costa oeste estaba disminuyendo a una razón promedio de:

- a. 0,1 millones de contenedores por año
~~b. 1,1 millones de contenedores por año~~
 c. 0,1 millones de contenedores
 d. 1,1 millones de contenedores

4. La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $v(t) = 6t^2$, la velocidad media entre los tiempos $t = 1$ y $t = 4$

- a. 37m/s
 b. 32m/s
 c. 36m/s
~~d. 30m/s~~

5. Un cuerpo se mueve de acuerdo con la función $f(t) = 2t^2 + t - 1$ encuentre a velocidad promedio cuando varía de 4 a 6 segundos.

- a. 20m/s
 b. 32m/s
~~c. 21m/s~~
 d. 27m/s

6. Una epidemia de cierta enfermedad, para la que no hay cura, azota una ciudad y los médicos estiman que el número de personas enfermas en un tiempo x , medido en días, está dado por la expresión: $f(x) = 2x^2 + x - 1$ La razón de cambio instantánea de la epidemia para cuando $x = 65$ días es:

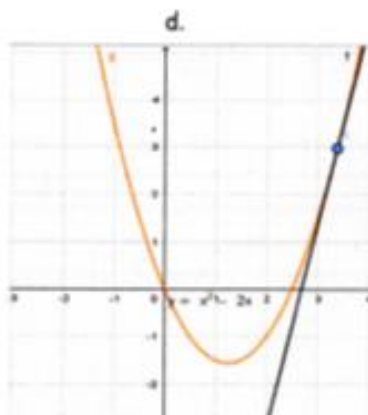
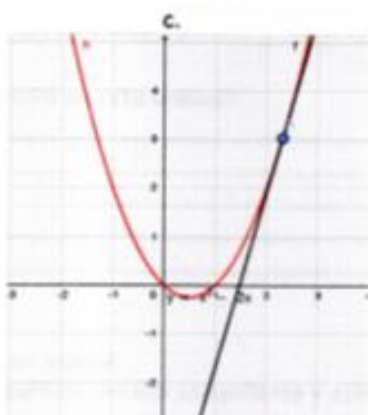
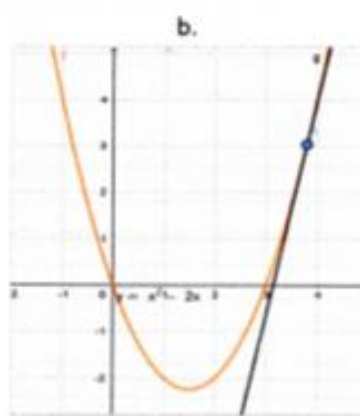
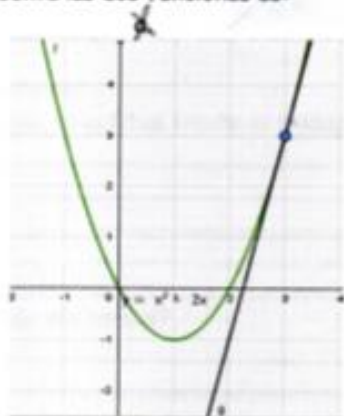
- ~~a. 261 personas enfermas.~~
 b. 258 personas enfermas.
 c. 161 personas enfermas.
 d. 981 personas enfermas.

7. La razón (tasa) de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama aceleración. Suponga que la velocidad de una partícula en el instante t está dada por $v(t) = 2t^2$. La aceleración instantánea cuando $t = 1$ segundos es:

- ~~a. 2 m/s²~~
 b. 4 m/s²
 c. 3,5 m/s²
 d. 4,5 m/s²

A.20. ACTIVIDAD DESARROLLADA PAGINA 21 DEL TEXTO

8. La recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ esta dada por la función $y = 4x - 9$. La grafica que representa las dos funciones es:



9. La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 4x^3$ en el punto $(1, 4)$ es:

- a. $y = 2x - 8$
 b. $y = 2x - 9$
 c. $y = 12x + 8$
~~a~~ d. $y = 12x - 8$

10. Aplicando la derivada de una función como el límite cuando h tiende a cero de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; donde h es la variación de x , se puede determinar que la derivada de la función $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$ es:

- a. No existe
 b. $4x - 2$

- ~~a~~ c. $8x - 2$
 d. ∞

11. En un aeropuerto se lanza un globo meteorológico para pronosticar el clima, el cual asciende en forma vertical, después de x tiempo (en horas) alcanza una altitud medida en Km, esta altura está definida por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 4x$$

La velocidad instantánea después de $\frac{1}{2}$ hora de haber sido lanzado es:

- ~~a~~ a. 2km/h
 b. 1.89km/h
 c. 2m/s
 d. 1.89m/s

A.21. DESARROLLO ALGEBRAICO PAGINA 21 DEL TEXTO

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad a=1 \quad f(a)=4$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 4x^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{4x^3} + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3 - \cancel{4x^3}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x^2h + 12xh^2 + 4h^3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 12x^2 + 12xh + 4h^2$$

$$f'(x) = 12x^2$$

$$f'(1) = 12$$

$$y - 4 = 12(x - 1)$$

$$y - 4 = 12x - 12$$

$$y = 12x - 12 + 4$$

$$y = 12x - 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 - (4x^2 - 4x + 3)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h + 3 - (4x^2 - 4x + 3)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 4x - 4h + 3 - 4x^2 + 4x - 3}{h}$$

$$\frac{8xh + 4h^2 - 4h}{h} = 8x + 4h - 4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (8x + 4h - 4) = 8x + 0 - 4$$

A.22. AUTOEVALUACION Y REFLEXION PAGINA 22 DEL TEXTO

Reflexiona y autoevalúate

Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?

he puesto de mi parte para tratar de aprender
y comprender los temas.

¿He cumplido mis tareas?

he tratado de terminar las ejercicios propuestos, pero
no todos me quedan completos y bien.

¿Qué aprendí en esta unidad?

comprendí un poco más sobre todos los temas
propuestos.

Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras?

si porque hemos hecho trabajos en grupo, donde
todas colaboramos.

¿He respetado las opiniones de los demás?

si, porque muchas veces ellos aprenden cosas que
yo no y tenemos que tener en cuenta todas
las opiniones.